A. KISELIOV

M. KRASNOV, G. MAKARENKO

PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS



EDITORIAL MIR


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

А. И. Киселев,
М. Л. Краснов,
Г. И. Макаренко

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
МОСКВА

A. Kiseliov
M. Krasnov
G. Makarenko

PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Cuarta edición

traducido del ruso por
EMILIANO APARICIO BERNARDO
candidato a doctor
en ciencias físico-matemáticas

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

НА ИСПАНСКОМ ЯЗЫКЕ

Primera edición 1968
Segunda edición 1973
Tercera edición 1979
Cuarta edición 1984

Impreso en la URSS

INDICE

INTRODUCCION A LA EDICION ESPAÑOLA

El presente libro de problemas es la traducción de la segunda edición de nuestro libro "Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias". Está destinado fundamentalmente para los estudiantes de los centros superiores de enseñanza técnica y abarca casi todas las secciones del curso de ecuaciones diferenciales para los centros superiores indicados.

El libro contiene 1000 problemas que se deben resolver individualmente.

Al comienzo de cada apartado se da una exposición breve de las nociones fundamentales y se resuelven unos ejemplos típicos.

Se presta atención fundamental a aquellas cuestiones que no están aclaradas con suficiente detalle en los cursos existentes y que, como muestra la experiencia, son difíciles para los estudiantes. Por ejemplo, se expone muy detalladamente el método de las isoclinas para las ecuaciones de primero y segundo órdenes, la aplicación de las series a la resolución de las ecuaciones diferenciales, las soluciones singulares, algunos problemas de estabilidad, etc.

A los autores nos causa gran satisfacción el hecho de que nuestro libro se traduzca al castellano y quedaríamos muy contentos si encontrase una buena acogida.

A. Kiseliov
M. Krasnov
G. Makarenko

§ 1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Se llama ecuación diferencial una ecuación que liga la variable independiente x, la función incógnita $y = y(x)$ y sus derivadas $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, es decir, una ecuación de la forma

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

En otras palabras, se llama *ecuación diferencial* una ecuación en la que figura la derivada o diferencial de la función incógnita.

Si la función incógnita $y = y(x)$ depende de una sola variable independiente x, la ecuación diferencial se llama ordinaria.

Por ejemplo:

$$1)\ \frac{dy}{dx} + xy = 0, \qquad 2)\ y'' + y' + x = \cos x,$$

$$3)\ (x^2 + y^2)\,dx + (x + y)\,dy = 0.$$

El orden de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden que figura en la ecuación. Por ejemplo: la ecuación diferencial $y' + xy = e^x$ es de primer orden; la ecuación diferencial $y'' + p(x)y = 0$, donde $p(x)$ es una función dada, es de 2° orden; la ecuación diferencial $y^{IX} - xy'' = x^2$, es de 9° orden.

Se llama *solución de la ecuación diferencial* una función $y = \varphi(x)$, determinada en el intervalo (a, b) junto con sus derivadas sucesivas hasta el orden n inclusive, tal que al hacer la sustitución $y = \varphi(x)$ en la ecuación diferencial, ésta, se convierte en una identidad con respecto a x en el intervalo (a, b).

Por ejemplo, la función $y = \operatorname{sen} x + \cos x$ es solución de la ecuación $y'' + y = 0$. En efecto, derivando dos veces esta función, se tiene:

$$y' = \cos x - \operatorname{sen} x, \qquad y'' = -\operatorname{sen} x - \cos x.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial y'' e y por sus expresiones, resulta la identidad:

$$-\operatorname{sen} x - \cos x + \operatorname{sen} x + \cos x \equiv 0.$$

La gráfica de una solución de la ecuación diferencial se denomina curva integral de la ecuación.

La forma general de una ecuación de primer orden es.

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (1)$$

Si en la ecuación (1) es posible despejar y', resulta

$$y' = f(x, y), \qquad (2)$$

que representa una ecuación de primer orden, resuelta con respecto a la derivada.

Teorema de existencia y unicidad.

Sea dada una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, donde la función $f(x, y)$ está definida en un recinto D del plano XOY que contiene el punto (x_0, y_0). Si la función $f(x, y)$ satisface a las condiciones:

a) $f(x, y)$ es una función continua de dos variables x e y, en el recinto D;

b) $f(x, y)$ admite derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$, continua con respecto de x e y en el recinto D, entonces, existe una, y sólo una, solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación dada que satisface a la condición $y|_{x=x_0} = y_0$.

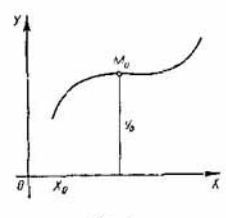


Fig. 1

La condición $y|_{x=x_0} = y_0$ se llama *condición inicial.*

El problema de la búsqueda de la solución de la ecuación $y' = f(x, y)$ que satisface a la condición inicial $y|_{x=x_0} = y_0$, lleva el nombre de *Cauchy.*

Geométricamente esto significa que se busca la curva integral que pasa por el punto dado $M_0(x_0, y_0)$ del plano XOY (fig. 1).

El teorema expresa las condiciones suficientes para la existencia de solución única del problema de Cauchy para la ecuación $y' = f(x, y)$, pero estas condiciones no son necesarias. Precisamente, puede existir una solución única

de la ecuación $y' = f(x, y)$ que satisface a la condición $y|_{x=x_0} = y_0$, a pesar de que en el punto (x_0, y_0) no se cumpla la condición a) o la condición b), o estas dos condiciones simultáneamente.

Ejemplo 1.

$$y' = \frac{1}{y^2}.$$

Aquí, $f(x, y) = \frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{y^3}$.

En los puntos $(x_0, 0)$ del eje OX no se cumplen las condiciones a) y b) (la función $f(x, y)$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ son discontinuas en el eje OX), mas, por cada punto del eje OX pasa una sola curva integral $y = \sqrt[3]{3(x - x_0)}$, (fig. 2).

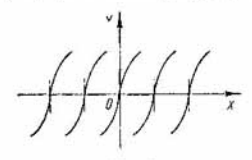


Fig. 2

Ejemplo 2.

$$y' = xy + e^{-y}.$$

El segundo miembro de la ecuación $f(x, y) = xy + e^{-y}$ y su derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y} = x - e^{-y}$ son continuas con respecto a x e y en todos los puntos del plano XOY. En virtud del teorema de existencia y unicidad, el recinto en el que la ecuación dada tiene solución única es todo el plano XOY.

Ejemplo 3.

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}.$$

El segundo miembro de la ecuación $f(x, y) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$ es una función definida y continua en todos los puntos del

plano XOY. La derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ se hace infinita para $y=0$, o sea, en el eje OX, de modo que para $y=0$ se infringe la condición b) del teorema de existencia y unicidad. Por consiguiente, es posible que no haya unicidad en los puntos del eje OX. Fácilmente se comprueba que la función $y=\frac{(x+c)^3}{8}$ es solución de la ecuación considerada. Además, la ecuación tiene la solución evidente $y\equiv 0$. Así, pues, por cada punto del eje OX pasan al menos dos curvas integrales y, por consiguiente, en los puntos de este eje, verdaderamente, queda infringida la unicidad (fig. 3).

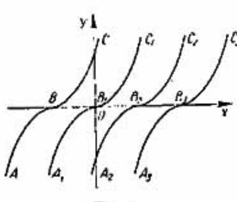


Fig. 3

Son también líneas integrales las formadas por trozos de las parábolas cúbicas $y=\frac{(x+c)^3}{8}$ y los segmentos del eje OX; por ejemplo, las líneas $ABOC_1$, ABB_2C_2, A_2B_2x, etc. De este modo, por cada punto del eje OX pasan infinitas líneas integrales.

Aplicando el teorema de existencia y unicidad señalar en los problemas que siguen los recintos en los que las ecuaciones dadas admiten solución única.

1. $y'=x^2+y^2$.
2. $y'=\frac{x}{y}$.
3. $y'=y+3\sqrt[3]{y}$.
4. $y'=\sqrt{x-y}$.
5. $y'=\sqrt{x^2-y}-x$.
6. $y'=\sqrt{1-y^2}$.
7. $y'=\frac{y+1}{x-y}$.
8. $y'=\operatorname{sen} y-\cos x$.
9. $y'=1-\operatorname{ctg} y$.
10. $y'=\sqrt[3]{3x-y}-1$.

Se llama solución general de la ecuación diferencial (2) una función

$$y=\varphi(x, C), \tag{3}$$

que depende de una constante arbitraria C y que cumple las condiciones:

1) ésta satisface a la ecuación (2) para cualesquiera valores de la constante C;

2) cualquiera que sea la condición inicial

$$y|_{x=x_0} = y_0 \qquad (y(x_0) = y_0) \tag{4}$$

siempre se puede asignar un valor C_0 a la constante C tal, que la función $y = \varphi(x, C_0)$ satisfaga a la condición inicial (4) dada Se supone que el punto (x_0, y_0) pertenece al recinto en el que se cumplen las condiciones de existencia y unicidad de la solución.

Se llama solución particular de la ecuación diferencial (2) a la que se obtiene de la solución general (3) asignado cualquier valor determinado a la constante arbitraria C.

Ejemplo 1. Comprobar que la función $y = x + C$ es la solución general de la ecuación diferencial $y' = 1$ y hallar la solución particular que satisface a la condición inicial $y|_{x=0} = 0$. Interpretar geométricamente el resultado.

Solución. La función $y = x + C$ satisface a la ecuación dada para cualesquiera valores de la constante arbitraria C. En efecto,

$$y' = (x + C)' = 1.$$

Consideremos una condición inicial arbitraria $y|_{x=x_0} = y_0$. Poniendo $x = x_0$, $y = y_0$ en la igualdad $y = x + C$, hallamos que $C = y_0 - x_0$. Poniendo este valor de C en la función dada, se tiene: $y = x + y_0 - x_0$. Esta función satisface a la condición inicial dada; en efecto, poniendo $x = x_0$ *resulta* $y = x_0 + y_0 - x_0 = y_0$. Así, pues, hemos demostrado que la función $y = x + C$ es la solución general de la ecuación dada.

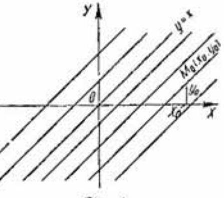


Fig. 4

En particular, poniendo $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, obtenemos la solución particular $y = x$.

La solución general de la ecuación considerada, o sea, la función $y = x + C$, determina en el plano XOY una familia de rectas paralelas de coeficiente angular $k = 1$. Por cada punto $M_0(x_0, y_0)$ del plano XOY pasa la única curva integral: $y = x + y_0 - x_0$. La solución particular $y = x$ determina una de las curvas integrales, a saber, la recta que pasa por el origen de coordenadas (fig. 4).

Ejemplo 2. Comprobar que la función $y = Ce^x$ es la solución general de la ecuación $y' - y = 0$ y hallar la solución particular que satisface a la condición inicial $y|_{x=1} = -1$.

Solución. Se tiene $y = Ce^x$, $y' = Ce^x$. Poniendo en la ecuación dada las expresiones de y e y', resulta, $Ce^x - Ce^x \equiv 0$, o sea, la función $y = Ce^x$ satisface a la ecuación considerada para cualesquiera valores de la constante C.

Asignemos una condición inicial arbitraria $y|_{x=x_0} = y_0$. Sustituyendo en la función $y = Ce^x$, x e y por x_0, y_0, se tiene $y_0 = Ce^{x_0}$, de donde $C = y_0 e^{-x_0}$. La función $y = y_0 e^{x-x_0}$ satisface a la condición inicial. En efecto, poniendo $x = x_0$, resulta $y = y_0 e^{x_0 - x_0} = y_0$. La función $y = Ce^x$ es la solución general de la ecuación dada.

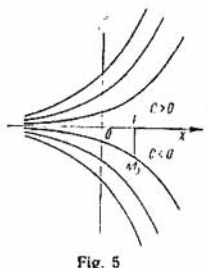


Fig. 5

Para $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, obtenemos la solución particular

$$y = -e^{x-1}.$$

Geométricamente, la solución general determina una familia de curvas integrales que representan las gráficas de funciones exponenciales; la solución particular es la curva integral que pasa por el punto $M_0(1, -1)$ (fig. 5).

Verificar, en los ejercicios que se dan a continuación, que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales indicadas:

11. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\quad xy' + y = \cos x$.

12. $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$,
$y' + 2y + e^x$.

13. $y = 2 + C\sqrt{1 + x^2}$,
$(1 - x^2)y' + xy = 2x$.

14. $y = x\sqrt{1 - x^2}$,
$yy' = x - 2x^3$.

15. $y=e^{\arcsen Cx}$, $xy'=y \operatorname{tg} \ln y$.

16. $y=e^{x}\int_{0}^{x} e^{t^2}\,dt+Ce^{x}$, $y'-y=e^{x+x^2}$.

17. $y=x\int_{0}^{x}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$, $xy'=y+x\operatorname{sen} x$.

18. $y=x\left(\int\frac{e^{x}}{x}\,dx+C\right)$, $xy'-y=xe^{x}$

19. $\left.\begin{array}{l} x=\cos t \\ y=\operatorname{sen} t \end{array}\right\}$, $x+yy'=0$.

20. $\left.\begin{array}{l} x=te^{t} \\ y=e^{-t} \end{array}\right\}$, $(1+xy)\,y'+y^2=0$.

21. $\left.\begin{array}{l} x=e^{\operatorname{arctg} t} \\ y=e^{-\operatorname{arctg} t} \end{array}\right\}$, $y-xy'=0$.

22. $\left.\begin{array}{l} x=t\ln t \\ y=t^2(2\ln t+1) \end{array}\right\}$, $y'\ln\frac{y'}{4}=4x$.

23. $\left.\begin{array}{l} x=\ln t+\operatorname{sen} t \\ y=t(1+\operatorname{sen} t)+\cos t \end{array}\right\}$, $x=\ln y'+\operatorname{sen} y'$.

24. $\left.\begin{array}{l} x=t+\arcsen t \\ y=\frac{t^2}{2}-\sqrt{1-t^2} \end{array}\right\}$, $x=y'+\arcsen y'$.

25. $\left.\begin{array}{l} x=t^2+e^{t} \\ y=\frac{2}{3}t^3+(t-1)\,e^{t} \end{array}\right\}$, $y'^2+e^{y'}=x$.

Verificar que las functiones dadas son las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales indicadas:

26. $y=\frac{C}{\cos x}$, $y'-\operatorname{tg} x\cdot y=0$.

27. $y=-\frac{1}{3x+C}$, $y'=3y^2$.

28. $y=\ln(C+e^{x})$, $y'=e^{x-y}$.

29. $y=\sqrt{x^2-Cx}$, $(x^2+y^2)\,dx-3xy\,dy=0$.

30. $y=x(C-\ln|x|)$, $(x-y)\,dx+x\,dy=0$.

31. $x = ye^{Cy+1}$, $y' = \frac{y}{x(\ln x - \ln y)}$.

32. $x = y \ln Cy$, $y'(x + y) = y$.

La relación $\Phi(x, y, C) = 0$, que de forma implícita determina la solución general, se llama integral general de la ecuación diferencial de primer orden.

La relación que se obtiene en la integral general al atribuir a la constante C un valor determinado, se llama integral particular de la ecuación diferencial.

El problema de resolución o de integración de una ecuación diferencial consiste en hallar la solución general o la integral general de la ecuación diferencial considerada. Si, además, se ha dado alguna condición inicial, se pide también hallar la solución particular o la integral particular que satisface a la condición inicial considerada.

Como geométricamente las coordenadas x e y son equipotentes, además de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ se considerará también la ecuación $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$.

Comprobar si las relaciones dadas son integrales de las ecuaciones diferenciales indicadas o no lo son ($C =$ const.):

33. $e^{-y} - Cx = 1$, $xy' + 1 = e^y$.

34. $y^3 = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^3}$, $xy^2\,dy + y^3\,dx = \frac{dx}{x}$.

35. $x^3 - 4x^2y + 2xy^2 - y^3 = 0$,
$(3x^2 - 8xy + 2y^2)\,dx - (4x^2 - 4xy + 3y^2)\,dy = 0$.

36. $y^2 + 2Cx = C^2$, $yy'^2 + 2xy' = y + 1$

37. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \ln(C\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$,
$(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$.

38. $x = y \int\limits_0^x \operatorname{sen} t^2\,dt$, $y = xy' + y^2 \operatorname{sen} x^2$.

39. $x \int\limits_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = y \ln y$,
$xy' + x \ln y = x \operatorname{sen} x + y \ln y$.

§ 2. METODO DE ISOCLINAS

La ecuación

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

determina en cada punto (x, y) donde existe la función $f(x, y)$, el valor de y', o sea, el coeficiente angular de la tangente a la curva integral en este punto.

Si en cada punto del recinto D se ha dado el valor de alguna magnitud, se dice que en el recinto D está definido el campo de esta magnitud

Por lo tanto, la ecuación diferencial (1) determina un campo de direcciones.

La terna de números (x, y, y') determina la dirección de una recta que pasa por el punto (x, y). El conjunto de los segmentos de estas rectas es la representación geométrica del campo de direcciones.

El problema de integración de la ecuación diferencial (1) se puede interpretar así: hay que hallar una curva cuya tangente en cada punto tenga la misma dirección que el campo en este punto.

Frecuentemente, el problema de la construcción de las curvas integrales se resuelve introduciendo las isoclinas. Se llama *isoclina* el lugar geométrico de puntos en los que las tangentes a las curvas integrales consideradas tienen una misma dirección. La familia de las isoclinas de la ecuación diferencial (1) se determina por la ecuación

$$f(x, y) = k, \tag{2}$$

donde k es un parámetro. Dando al parámetro k valores numéricos próximos dibujamos una red bastante compacta de isoclinas, sirviéndose de las cuales se pueden trazar aproximadamente las curvas integrales de la ecuación diferencial (1).

Observación 1. La isoclina nula $f(x, y) = 0$ proporciona las líneas en las que pueden estar situados los puntos de máximo y de mínimo de las curvas integrales. Al trazar las curvas integrales, para mayor exactitud, hallan también el lugar geométrico de los puntos de in-

flexión. Para esto se halla y'' de la ecuación (1):

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{\partial f}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} \tag{3}$$

y se iguala a cero. La línea determinada por la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

es, precisamente, el lugar geométrico de los puntos de inflexión, si éstos existen

Ejemplo 1. Sirviéndose de las isoclinas, trazar aproximadamente las curvas integrales de la ecuación diferencial $y' = 2x - y$.

Solución. Para obtener las ecuaciones de las isoclinas, ponemos $y' = k$ ($k = \text{const}$). Se tiene:

$$2x - y = k, \quad \text{o bien,} \quad y = 2x - k.$$

Las isoclinas son rectas paralelas. Para $k = 0$ se obtiene la isoclina $y = 2x$. Esta recta divide el plano XOY en dos partes, en cada una de las cuales la derivada y' tiene un mismo signo (fig. 6).

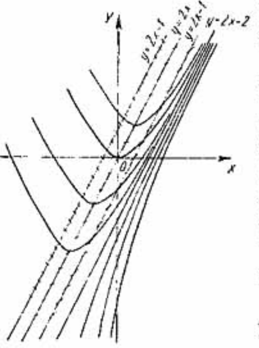


Fig. 6

Las curvas integrales, cortándose con la recta $y = 2x$, pasan de la región de decrecimiento de la función y a la región de crecimiento de la misma y viceversa. Por lo tanto, en esta recta se encuentran los puntos extremales de las curvas integrales, los puntos de mínimo.

Consideremos otras dos isoclinas:

$$k = -1, \quad y = 2x + 1$$

y

$$k = 1, \quad y = 2x - 1.$$

Las tangentes, trazadas a las curvas integrales en los puntos de intersección con las isoclinas $k = -1$ y $k = 1$, forman con el eje OX ángulos de 135° y 45°, respectivamente. Hallemos ahora la segunda derivada: $y'' = 2 - y' = 2 - 2x + y$.

La recta $y = 2x - 2$, en la que $y'' = 0$, es la isoclina que se obtiene para $k = 2$, y a la vez es una curva integral, de lo que puede uno convencerse sustituyendo en la ecuación. Como el segundo miembro de la ecuación considerada $f(x, y) = 2x - y$, satisface a las condiciones del teorema de existencia y unicidad en todo el plano XOY, las demás curvas integrales no se cortan con esta isoclina. La isoclina $y = 2x$, en la que se encuentran los puntos mínimos de las curvas integrales, está situada sobre la isoclina $y = 2x - 2$, por lo cual, las curvas integrales que pasan por debajo de la isoclina $y = 2x - 2$ no tienen puntos extremales.

La recta $y = 2x - 2$ divide el plano XOY en dos partes, en una de las cuales (la que está situada sobre la recta) $y'' > 0$, y por lo tanto, las curvas integrales tienen dirigidas hacia arriba sus concavidades, y en la otra, $y'' < 0$, y por consiguiente, las curvas integrales tienen sus concavidades dirigidas hacia abajo. Como las curvas integrales no se cortan con la recta $y = 2x - 2$, ésta no es el lugar geométrico de los puntos de inflexión. Las curvas integrales de la ecuación dada no tienen puntos de inflexión.

La investigación realizada nos permite trazar aproximadamente la familia de las curvas integrales de la ecuación (fig. 6).

Ejemplo 2. Trazar, aproximadamente, las curvas integrales de la ecuación diferencial $y' = \operatorname{sen}(x + y)$, empleando el método de isoclinas.

S o l u c i ó n. Poniendo $y' = k$, donde $k = \text{const}$, se obtiene la ecuación de las isoclinas $\operatorname{sen}(x + y) = k$, siendo $-1 \leqslant k \leqslant 1$. Para $k = 0$, se tiene $\operatorname{sen}(x + y) = 0$, de donde

$$y = -x + \pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (1)$$

Las tangentes a las curvas integrales en sus puntos de intersección con estas isoclinas son horizontales. Determinemos si las curvas integrales tienen extremos relativos en las isoclinas $y = -x + \pi n$, y cuáles son: máximos o mínimos. Para esto, hallamos la derivada segunda

$$y'' = (1 + y') \cos(x + y) = [1 + \operatorname{sen}(x + y)] \cos(x + y).$$

Para $y = -x + \pi n$, o sea, si $x + y = \pi n$, se tiene:

$$y'' = (1 + \operatorname{sen} \pi n) \cos \pi n = \cos \pi n = (-1)^n$$

Si n es par, resulta, $y'' > 0$, y por consiguiente, las curvas integrales tienen mínimos relativos en los puntos de intersección con las isoclinas $y = -x + \pi n$, donde $n = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$; si n es impar, resulta, $y'' < 0$, y las curvas integrales tienen máximos relativos en los puntos de intersección con las isoclinas $y = -x + \pi n$, donde $n = \pm 1, \pm 3, \ldots$.

Hallemos ahora las isoclinas:

$$k = -1, \quad \operatorname{sen}(x + y) = -1; \quad y = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n \qquad (2)$$

$$k = 1, \quad \operatorname{sen}(x + y) = 1; \quad y = -x + \frac{\pi}{2} + 2\pi n \qquad (3)$$

$$(n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots).$$

Las isoclinas son rectas paralelas con el coeficiente angular igual a -1, o sea, que se cortan con el eje OX formando con éste un ángulo de 135°. Fácilmente se comprueba que las isoclinas $y = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n = 0 \pm, \pm 1, \ldots)$ son curvas integrales de la ecuación diferencial considerada (para esto, es suficiente poner la función $y = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ en la ecuación (1)).

El segundo miembro de la ecuación dada, o sea, la función $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$, satisface a las condiciones del teorema de existencia y unicidad en todos los puntos del plano XOY, por esto, las curvas integrales no se cortan y por ende, no se cortan con las isoclinas $y = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Por otra parte, la derivada y'' se anula si $1 + \operatorname{sen}(x + y) = 0$, o sea, en las isoclinas (2), y si $\cos(x + y) = 0$, o sea, en las isoclinas (2) y (3) Al pasar (de izquierda a derecha) por las isoclinas (3), y'' cambia el signo de más a menos. Por ejemplo, si se considera la "franja" comprendida entre las isoclinas $y = -x$ e $y = -x + \pi$, resulta que en la isoclina $y = -x + \frac{\pi}{2}$ se tiene $y'' = 0$; bajo la isoclina, $y'' > 0$, o sea, la concavidad de las curvas integrales está dirigida hacia arriba, y sobre la isoclina, $y'' < 0$, o sea, la concavidad de las

curvas integrales está dirigida hacia abajo. Por lo tanto, las isoclinas (3) representan el lugar geométrico de los puntos de inflexión de las curvas integrales. Los datos obtenidos permiten trazar aproximadamente la familia de

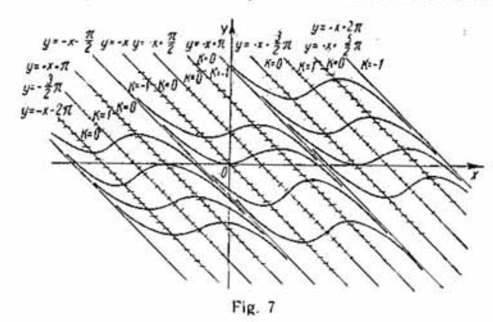


Fig. 7

las curvas integrales de la ecuación dada. Para mayor exactitud, se deben trazar también unas cuantas isoclinas (fig. 7).

Ejemplo 3. Aplicando el método de las isoclinas, trazar las curvas integrales de la ecuación $y' = y - x^2 + 2x - 2$.

Solución. Pongamos $y' = k (k = \text{const})$. La ecuación de las isoclinas es:

$$y - x^2 + 2x - 2 = k, \quad \text{o bien,} \quad y = x^2 - 2x + 3 + k.$$

Las isoclinas son parábolas con el eje vertical de simetría $x = 1$. Entre las isoclinas no hay curvas integrales. En efecto, poniendo en la ecuación dada $y = x^2 - 2x + 2 + k$, $y' = 2x - 2$, se tiene, $2x - 2 = x^2 - 2x + 2 + k - x^2 + 2x - 2$, o bien, $2x - 2 = k$. Pero, cualquiera que sea el valor de k, esta igualdad no puede verificarse idénticamente con respecto a x.

Sea $k = 0$. En este caso, las curvas integrales tienen tangentes horizontales en los puntos de intersección con la isoclina $y = x^2 - 2x + 2$. La isoclina $k = 0$, o sea, la parábola $y = x^2 - 2x + 2$, divide el plano XOY en dos

partes: en una de ellas $y' < 0$ (las soluciones decrecen), mientras que en la otra $y' > 0$ (las soluciones crecen). Como esta isoclina no es una curva integral, en ella están situados los puntos de extremo relativo de las curvas integrales: los puntos de mínimo se encuentran en la parte de la parábola $y = x^2 - 2x + 2$, en que $x < 1$, y los puntos de máximo, en la otra parte de la misma, en que $x > 1$. La curva integral que pasa por el punto $(1, 1)$, o sea, por el vértice de la parábola $y = x^2 - 2x + 2$, no tiene extremo relativo en este punto. Los coeficientes angulares de las tangentes a las curvas integrales en los puntos de las isoclinas $k = 1$, $y = x^2 - 2x + 3$, y $k = -1$, $y = x^2 - 2x + 1$, son iguales a 1 y -1, respectivamente.

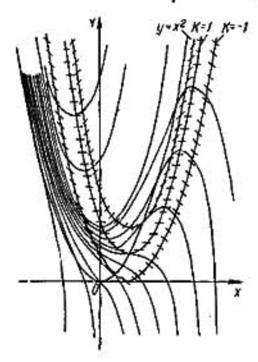


Fig. 8

Para averiguar las direcciones de las concavidades de las curvas integrales, hallemos la derivada segunda. Se tiene,

$$y'' = y' - 2x + 2 = y - x^2 + 2x - 2 - 2x + 2 = y - x^2.$$

Esta se anula solamente en los puntos situados en la parábola $y = x^2$. Las curvas integrales tienen sus concavidades dirigidas hacia abajo ($y'' < 0$) en los puntos del plano XOY cuyas coordenadas satisfacen a la condición $y < x^2$, y sus concavidades dirigidas hacia arriba ($y'' > 0$), en los puntos, donde $y > x^2$. Los puntos de intersección de las curvas integrales con la parábola $y = x^2$, son los puntos de inflexión de éstas. Así, pues, la parábola $y = x^2$ es el lugar geométrico de los puntos de inflexión de las curvas integrales.

El segundo miembro de la ecuación inicial $f(x, y) = y - x^2 + 2x - 2$ satisface a las condiciones del teorema de existencia y unicidad en todos los puntos del plano XOY, por lo cual, por cada punto del plano pasa una sola curva integral de la ecuación.

Aplicando los resultados obtenidos, trazamos aproximadamente la familia de las curvas integrales de la ecuación dada (fig. 8).

O b s e r v a c i ó n 2. Los puntos de intersección de dos o más isoclinas pueden ser puntos singulares de la ecuación diferencial (1) (o sea, puntos en los que el segundo miembro de la ecuación (1) no está definido).

Examinemos la ecuación $y' = \frac{y}{x}$. La familia de las isoclinas se determina por la ecuación $\frac{y}{x} = k$. Esta representa una familia de rectas que pasan por el origen de coordenadas, de modo que en este punto se cortan las isoclinas que corresponden a diversas pendientes de las tangentes a las curvas integrales. Fácilmente se observa que la solución general de la ecuación dada es de la forma $y = Cx$ y que el punto (0, 0) es un punto singular de la ecuación diferencial. En este caso, las isoclinas son curvas integrales de la ecuación (fig. 9).

Ejemplo 4. Aplicando el método de las isoclinas, trazar las curvas integrales de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}.$$

S o l u c i ó n. Poniendo $y' = k$ (k = const), obtenemos la ecuación de la familia de las isoclinas

$$\frac{y - x}{y + x} = k.$$

Por lo tanto, las isoclinas son rectas que pasan por el origen de coordenadas O (0, 0).

Para $k = -1$, obtenemos la isoclina $y = 0$ (el eje OX); para $k = 0$, la isoclina $y = x$; para $k = 1$, la isoclina $x = 0$ (el eje OY).

Examinando la ecuación "invertida"

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y + x}{y - x},$$

hallamos la isoclina $y = -x$, en todos los puntos de la cual, las curvas integrales tienen tangentes verticales.

Todas las isoclinas de la ecuación considerada se cortan en el punto (0,0) (punto singular de la ecuación).

Sirviéndose de las isoclinas obtenidas trazamos las curvas integrales (fig. 10).

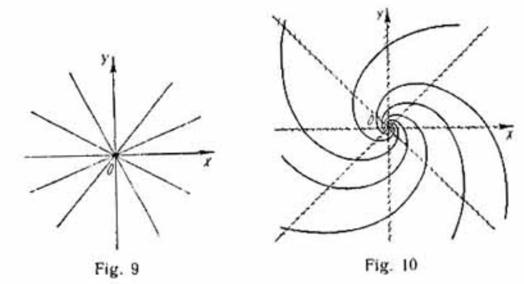


Fig. 9 Fig. 10

Aplicando el método de las isoclinas, trazar las curvas integrales de las ecuaciones diferenciales siguientes:

40. $y' = x + 1$

41. $y' = x + y$

42. $y' = y - x$

43. $y' = \frac{1}{2}(x - 2y + 3)$

44. $y' = (y - 1)^2$

45. $y' = (y - 1)x$

46. $y' = x^2 - y^2$

47. $y' = \cos(x - y)$

48. $y' = y - x^2$

49. $y' = x^2 + 2x - y$

50. $y' = \frac{y + 1}{x - 1}$

51. $y' = \frac{x + y}{x - y}$

52. $y' = 1 - xy$

53. $y' = 2 - y$

54. $y' = 1 - x$

55. $y' = 2x - y$

56. $y' = (1 - y)(1 - x)$

57. $y' = \operatorname{sen}(y - 2x)$

58. $y' = x^2 + y$

59. $y' = y - x^2 + 2x$

60. $y' = \frac{x - 1}{y}$

61. $y' = -\frac{y}{x}$

62. $y' = 1$

63. $y' = \frac{1}{x}$

64. $y' = y$

65. $y' = y^2$

66. $y' = \frac{1}{y}$

67. $y' = 1 + y^2$

68. $y' = x$

§ 3. METODO DE EULER

Con este método se puede hallar en el segmento $[x_0, b]$ la solución aproximada de la ecuación $y' = f(x, y)$ que satisface a la condición inicial $y|_{x=x} = y_0$.

El método de Euler consiste en sustituir por una quebrada de segmentos rectos la curva integral buscada de la ecuación diferencial que pasa por el punto $M_0(x_0, y_0)$.

Dividamos el segmento $[x_0, b]$ en n partes (no necesariamente iguales) por los puntos $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Tracemos, por el punto inicial $M_0(x_0, y_0)$ de la curva integral, una recta M_0M de coeficiente angular $f(x_0, y_0)$, hasta el punto $M_1(x_1, y_1)$ de intersección con la recta $x = x_1$. La ordenada del punto M_1 se determina por la fórmula

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$

Tracemos por el punto $M_1(x_1, y_1)$ una recta M_1M_2 de coeficiente angular $f(x_1, y_1)$ hasta el punto $M_2(x_2, y_2)$ de intersección con la recta $x = x_2$. La ordenada del punto M_2 se determina por la fórmula

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1).$$

De modo análogo se determina el punto $M_3(x_3, y_3)$, etc. La ordenada del punto $M_n(x_n, y_n)$ se determina por la fórmula

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Los valores aproximados de la solución de la ecuación dada en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son: $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Haciendo la construcción correspondiente se obtiene una quebrada, denominada *quebrada de Euler*, que representa aproximadamente la curva integral que pasa por el punto $M_0(x_0, y_0)$ (fig. 11).

Generalmente, para facilitar los cálculos y las acotaciónes se divide el segmento $[x_0, b]$ en partes iguales y se hace la notación $h = x_k - x_{k-1}$. La magnitud h se llama intervalo de variación del argumento.

Se puede demostrar que, cumpliéndose ciertas condiciones respecto de la función $f(x, y)$, para $h \to 0$ la solución aproximada proporciona la solución exacta de la ecuación dada que satisface a la condición inicial $y|_{x=x_0} = y_0$.

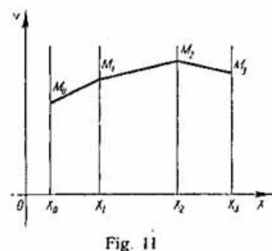


Fig. 11

Ejemplo. Aplicando el método de las quebradas de Euler, hallar en el segmento [0, 1] la solución aproximada de la ecuación $y' = 2x - y$ que satisface a la condición $y|_{x=0} = -1$. Dividir el segmento [0, 1] en 10 partes iguales y comparar los valores de la solución aproximada en los puntos de división con los valores respectivos de la solución exacta $y = 2x - 2 + e^{-x}$.

S o l u c i ó n. Los valores de las ordenadas y_k en los puntos $M_k(x_k, y_k)$ se calculan por la fórmula

$$y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$
$$(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10).$$

En este caso, $f(x_{k-1}, y_{k-1}) = 2x_{k-1} - y_{k-1}$ y las diferencias, $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_{10} - x_9 = h = 0{,}1$, puesto que se ha dividido el segmento [0, 1] en 10 partes iguales y, por consiguiente, $y_k = y_{k-1} + (2x_{k-1} - y_{k-1}) \cdot 0{,}1$, $k = 1, 2, \ldots 10$.

k	x_k	$2x_k$	y_k	$2x_k - y_k$	$(2x_k - y_k)\,0{,}1$	y_{k+1}	$y_k = 2x_k - 2 + e^{-x_k}$
0	0	0	−1	1	0,1	−0,900	−1
1	0,1	0,2	−0,9000	1,1	0,1100	−0,7900	−0,8952
2	0,2	0,4	−0,7900	1,19	0,1190	−0,6710	−0,7813
3	0,3	0,6	−0,6710	1,271	0,1271	−0,5439	−0,6592
4	0,4	0,8	−0,5439	1,3439	0,13439	−0,4095	−0,5297
5	0,5	1,0	−0,4095	1,4095	0,14095	−0,2686	−0,3935
6	0,6	1,2	−0,2686	1,4686	0,14666	0,1217	−0,2512
7	0,7	1,4	−0,1217	1,5217	0,15217	0,03047	−0,1034
8	0,8	1,6	−0,03047	1,5695	0,15695	0,1874	0,0493
9	0,9	1,8	−0,1874	1,6126	0,16126	0,3486	0,2066
10	1,0	2,0	−0,3486				0,3679

Los resultados de los cálculos se escriben en una tabla, en cuya última columna se señalan los valores de la solución exacta $y = 2(x - 1) + e^{-x}$ en los puntos de división del segmento [0, 1].

Obsérvese que el método de Euler no es de gran precisión, a pesar de que, a veces, se obtiene una exactitud satisfactoria. Por ejemplo, para $x = 0,5$ el error absoluto del valor de la solución aproximada es:

$$\Delta = | -0,4095 + 0,3935 | = 0,0160;$$

el valor del error relativo es:

$$\delta = \frac{0,0160}{|-0,4095|} = 0,039 \approx 4\%.$$

Aplicando el método de Euler y empleando la regla de cálculo, resolver los problemas siguientes:

69. Hallar para $x = 1$ el valor de la solución de la ecuación $y' = x^2 y + 2$ correspondiente a la condición inicial $y|_{x=0} = 0$ $(h = 0, 2)$.

70. Trazar, aproximadamente, en el segmento [1, 3], la curva integral de la ecuación $y' = x + y$ que pasa por el punto M (1,2) y calcular y (3) $(h = 0,2)$.

Para las ecuaciones que siguen, formar una tabla de los valores de la solución que satisface a la condición inicial dada en el segmento indicado:

71. $y' = \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$, $[1, 4]$ $(h = 0,5)$.

72. $y' = \frac{1}{2} xy$, $y(0) = 1$, $[0, 1]$ $(h = 0,1)$.

73. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$, $[0, 1]$ $(h = 0,1)$.

74. $y' = 1 + xy^2$, $y(0) = 0$, $[0, 1]$ $(h = 0,1)$.

75. $y' = \frac{y}{x+1} - y^2$, $y(0) = 1$, $[0, 1]$, $(h = 0,1)$.

§ 4. METODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS

Supongamos que se pide hallar la solución $y = y(x)$ de la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

que satisface a la condición inicial

$$y\big|_{x=x} = y_0. \tag{2}$$

Supondremos que en cierto rectángulo

$$D\{|x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b\}$$

con centro en el punto (x_0, y_0), para la ecuación (1), se cumplen las condiciones a) y b) del teorema de existencia y unicidad de la solución del problema (1)—(2) (véase la pág. 10).

La solución del problema (1)—(2) se puede hallar por el método de aproximaciones sucesivas que consiste en lo siguiente:

Se forma una sucesión de funciones $\{y_n(x)\}$, determinadas por las relaciones reiteradas

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y_{n-1}(t)]\,dt, \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Por aproximación nula $y_0(x)$ se puede tomar cualquier función que sea continua en un entorno del punto $x = x_0$; en particular, $y_0(x) \equiv y_0$, donde y_0 es el valor inicial de Cauchy (2). En virtud de las hipótesis que se hacen con respecto a la ecuación (1), las aproximaciones sucesivas $\{y_n(x)\}$ convergen hacia la solución exacta de la ecuación (1) que satisface a la condición (2) en cierto intervalo $x_0 - h < x < x_0 + h$, donde

$$\begin{aligned} h &= \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \\ M &= \max_{(x\ y) \in D} |f(x, y)|. \end{aligned} \tag{4}$$

La cota del error cometido al sustituir la solución exacta $y(x)$ por la aproximación n-ésima $y_n(x)$ es:

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{M \cdot N^{n-1}}{n!} h^n, \qquad (5)$$

donde

$$N = \max_{(x, y) \in D} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|.$$

Por el método de las aproximaciones sucesivas hay que detenerse en una n de modo que $|y_{n+1} - y_n|$ no supere al error permitido.

Ejemplo. Empleando el método de las aproximaciones sucesivas, hallar la solución aproximada de la ecuación

$$y' = x^2 + y^2,$$

que satisface a la condición inicial $y|_{x=0} = 0$ en el rectángulo $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

Solución. Se tiene $|f(x, y)| = x^2 + y_2 \leqslant 2$, o sea, $M = 2$. Tomamos por h el menor de los números $a = 1$ $\frac{b}{M} = \frac{1}{2}$ o sea, $h = \frac{1}{2}$. Según (4), las aproximaciones sucesivas convergen en el intervalo $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Estas son:

$$y_0(x) = 0;$$

$$y_1(x) = \int_0^x (t^2 + y_0^2)\, dt = \frac{x^3}{3};$$

$$y_2(x) = \int_0^x [t^2 + y_1^2(t)]\, dt = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9}\right) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63};$$

$$y_3(x) = \int_0^x [t^2 + y_2^2(t)]\, dt = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9} + \frac{2t^{10}}{3 \cdot 63} + \frac{t^{14}}{63^2}\right) dt =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59\,535}.$$

El error absoluto de la tercera aproximación no supera a la magnitud

$$|y_3(x) - y(x)| \leqslant \frac{2}{3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 2^2 = \frac{1}{6};$$

En este caso,

$$N = \max_D \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \max_D | 2y | = 2.$$

En los siguientes ejercicios hay que hallar tres aproximaciones sucesivas:

76. $y' = x^2 - y^2;$ $\qquad y|_{x=-1} = 0.$

77. $y' = x + y^2;$ $\qquad y|_{x=0} = 0.$

78. $y' = x + y;$ $\qquad y|_{x=0} = 1.$

79. $y' = 2y - 2x^2 - 3;$ $\qquad y|_{x=0} = 2.$

80. $xy' = 2x - y;$ $\qquad y|_{x=1} = 2.$

§ 5. ECUACIONES CON VARIABLES SEPARABLES Y ECUACIONES REDUCIBLES A ELLAS

La ecuación diferencial de la forma

$$\varphi(y)\,dy = f(x)\,dx \tag{1}$$

se llama ecuación con variables separadas

Las ecuaciones de la forma

$$\varphi_1(x)\,\psi_1(y)\,dx = \varphi_2(x)\,\psi_2(y)\,dy, \tag{2}$$

en las que los coeficientes de las diferenciales se descomponen en factores que dependen solamente de x o solamente de y, se llaman ecuaciones con variables separables.

Dividiendo por el producto $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ éstas se reducen a ecuaciones con variables separadas:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\,dy. \tag{2'}$$

La integral general de esta ecuación tiene la forma

$$\int \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\,dx - \int \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\,dy = C. \qquad (3)$$

O b s e r v a c i ó n. La división por $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ puede dar lugar a que se pierdan las soluciones particulares que anulan al producto $\psi_1(y)\varphi_2(x)$.

La ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c),$$

donde a, b y c son constantes, se reduce a una ecuación con variables separables haciendo la sustitución

$$z = ax + by + c.$$

Ejemplo 1. Resolver la ecuación

$$3e^x \operatorname{tg} y\,dx + (2 - e^x)\sec^2 y\,dy = 0.$$

S o l u c i ó n. Dividimos ambos miembros de la ecuación por el producto $\operatorname{tg} y \cdot (2 - e^x)$

$$\frac{3e^x\,dx}{2 - e^x} + \frac{\sec^2 y\,dy}{\operatorname{tg} y} = 0.$$

Ha resultado una ecuación con variables separadas. Integrándola hallamos:

$$-3\ln|2 - e^x| + \ln|\operatorname{tg} y| = C_1.$$

Efectuando la potenciación, obtenemos:

$$\frac{|\operatorname{tg} y|}{|2 - e^x|^3} = e^{C_1}, \quad \text{o bien} \quad \left|\frac{\operatorname{tg} y}{(2 - e^x)^3}\right| = e^{C_1}.$$

De aquí,

$$\frac{\operatorname{tg} y}{(2 - e^x)^3} = \pm e^{C_1}.$$

Designando $\pm e^{C_1} = C$, se tiene:

$$\frac{\operatorname{tg} y}{(2 - e^x)^3} = C, \quad \text{o bien,} \quad \operatorname{tg} y - C(2 - e^x)^3 = 0.$$

Hemos obtenido la integral general de la ecuación dada.

Al dividir por el producto $\operatorname{tg} y \cdot (2 - e^x)$ se suponía que ninguno de los factores se convertía en cero. Igualando cada factor a cero, obtenemos, respectivamente:

$$y = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad x = \ln 2.$$

Sustituyendo en la ecuación inicial comprobamos que $y = k\pi$ y $x = \ln 2$ son soluciones de esta ecuación. Estas pueden obtenerse formalmente de la integral general haciendo $C = 0$ y $C = \infty$. Esto significa que la constante C se sustituye por $\frac{1}{C_2}$, después de lo cual, la integral general toma la forma

$$\operatorname{tg} y - \frac{1}{C_2}(2 - e^x)^3 = 0, \quad \text{o bien,} \quad C_2 \operatorname{tg} y - (2 - e^x)^3 = 0;$$

haciendo en la última igualdad $C_2 = 0$, lo que corresponde a $C = \infty$, tendremos $(2 - e^x)^3 = 0$; de aquí obtenemos la solución $x = \ln 2$ de la ecuación inicial. En consecuencia, las functiones $y = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) y $x = \ln 2$ son soluciones particulares de la ecuación dada. Por consiguiente, el resultado final es

$$\operatorname{tg} y - C(2 - e^x)^3 = 0.$$

Ejemplo 2. Hallar la solución particular de la ecuación

$$(1 + e^x)\, yy' = e^x,$$

que satisface a la condición inicial $y|_{x=0} = 1$.

Solución. Se tiene:

$$(1 + e^x)\, y \frac{dy}{dx} = e^x.$$

Separando las variables, resulta:

$$y\,dy = \frac{e^x\,dx}{1 + e^x}.$$

Integrando, hallamos la integral general

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C. \qquad (1)$$

Poniendo en (1) $x = 0$, tendremos $\frac{1}{2} = \ln 2 + C$, de donde hallamos: $C = \frac{1}{2} - \ln 2$. Poniendo este valor de C en (1), obtenemos la integral particular

$$y^2 = \ln\left(\frac{1 + e^x}{2}\right)^2 + 1.$$

de donde la solución particular buscada es: $y=$ $=\sqrt{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2+1}$.

Ejemplo 3. Hallar la solución particular de la ecuación

$$y'\operatorname{sen} x=y\ln y,$$

que satisface a las condiciones iniciales siguientes:

$$\text{a) } y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=e, \quad \text{b) } y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=1.$$

Solución. Se tiene

$$\frac{dy}{dx}\operatorname{sen} x=y\ln y.$$

Separamos las variables

$$\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{\operatorname{sen} x}.$$

Integrando, hallamos la integral general

$$\ln|\ln y|=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\ln C.$$

Después de potenciar, obtenemos:

$$\ln y=C\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad \text{o bien,} \quad y=e^{C\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}},$$

que es la solución general de la ecuación considerada.

a) Pongamos ahora $x=\frac{\pi}{2}$, $y=e$; entonces, $e=e^{C\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}$. De aquí que $C=1$. Así, pues, $y=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

b) Hallemos ahora la solución particular de la ecuación que satisface a la condición inicial $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$.

Poniendo $C=0$ en la solución general $y=e^{C\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$, obtenemos la solución particular buscada. Obsérvese que cuando se obtenía la solución general, la constante C figuraba bajo el signo del logaritmo, por lo cual, $C=0$ se puede considerar como valor límite. La solución particular $y=1$ está comprendida entre los ceros del producto $y\cdot\ln y\cdot\operatorname{sen} x$, por el cual dividimos ambos miembros de la ecuación dada.

Integrar las ecuaciones:

81. $(1+y^2)\,dx+(1+x^2)\,dy=0.$

82. $(1+y^2)\,dx+xy\,dy=0.$

83. $(y^2+xy^2)\,y'+x^2-yx^2=0.$

84. $(1+y^2)\,dx=x\,dy.$

85. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0.$

86. $x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0, \quad y\,|_{x=0}=1.$

87. $e^{-y}(1+y')=1$

88. $y\ln y\,dx+x\,dy=0, \quad y\,|_{x=1}=1.$

89. $y'=a^{x+y}$ $(a>0,\ a\neq 1).$

90. $e^y(1+x^2)\,dy-2x(1+e^y)\,dx=0.$

91. $(1+e^x)\,yy'=e^y, \quad y\,|_{x=0}=0.$

92. $(1+y^2)(e^{2x}\,dx-e^y\,dy)-(1+y)\,dy=0.$

93. $(xy^2-y^2+x-1)\,dx+(x^2y-2xy+x^2+2y-$
$-2x+2)\,dy=0.$

94. $y'=\operatorname{sen}(x-y).$

95. $y'=ax+by+c$ $(a,\ b,\ c$ — const).

96. $(x+y)^2\,y'=a^2.$

97. $(1-y)\,e^y\,y'+\frac{y^2}{x\ln x}=0.$

98. $(1+y^2)\,dx=\left(y-\sqrt{1+y^2}\right)(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\,dy.$

99. $xy^2(xy'+y)=a^2.$

100. $(x^2y^2+1)\,dx+2x^2\,dy=0.$
(la sustitución $xy=t$).

101. $(1+x^2y^2)\,y+(xy-1)^2\,xy'=0.$
(la sustitución $xy=t$).

102. $(x^2y^3+y+x-2)\,dx+(x^3y^2+x)\,dy=0$
(la sustitución $xy=t$)

103. $(x^6-2x^5+2x^4-y^3+4x^2y)\,dx+(xy^2-4x^3)\,dy=0$
(la sustitución $y=tx$).

104. $y'+1=\frac{(x+y)^m}{(x+y)^n+(x+y)^p}.$

105. $(\ln x + y^3)\,dx - 3xy^2\,dy = 0$.

106. $(xy + 2xy \ln^2 y + y \ln y)\,dx + (2x^2 \ln y + x)\,dy = 0$ (la sustitución $x \ln y = t$).

107. $y - xy' = a(1 + x^2 y')$.

108. $(a^2 + y^2)\,dx + 2x\sqrt{ax - x^2}\,dy = 0$, $y|_{x=a} = 0$.

109. $y' + \operatorname{sen}\frac{x+y}{2} = \operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$.

Ejemplo 4. Hallar una curva que pase por el punto (0, —2), de modo que la pendiente de la tangente en cualquiera de sus puntos sea igual a la ordenada del punto, aumentada en 3 unidades.

Solución. Basándose en el significado geométrico de la primera derivada, obtenemos la ecuación diferencial de la familia de curvas que cumplen la condición pedida:

$$\frac{dy}{dx} = y + 3. \qquad (1)$$

Separando las variables e integrando, obtenemos la solución general

$$\ln|y + 3| = x + C. \qquad (2)$$

Como la curva buscada tiene que pasar por el punto (0, —2), o sea,

$$y|_{x=0} = -2, \qquad (3)$$

de (2) determinamos el valor de C correspondiente a esta curva: $\ln|-2 + 3| = 0 + C$, o sea, $C = 0$, de modo que $x = \ln|y + 3|$, de donde

$$y = -3 \pm e^x.$$

En virtud de la condición (3), se debe tomar el signo más:

$$y = e^x - 3.$$

Ejemplo 5. Un depósito cilíndrico de volumen V_0 está lleno de aire atmosférico, que se comprime de un modo adiabático (sin intercambio de calor con el medio que le rodea) hasta que su volumen se hace igual a V_1.

Calcular el trabajo invertido durante la compresión.

Solución. Es sabido que el proceso adiabático se caracteriza por la ecuación de Poisson

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{V_0}{V}\right)^k, \tag{1}$$

donde V_0 es el volumen inicial del gas, p_0 es la presión inicial del mismo y k es una magnitud constante para el gas dado. Designemos con V y p, respectivamente, el volumen y la presión del gas en el momento en que el émbolo estaba situado a la altura h, y con S, el área de la superficie del émbolo. Entonces, al descender el émbolo en la magnitud dh, el volumen del gas disminuirá en la magnitud $dV=S\,dh$. En este caso, se realizará el trabajo

$$dW=-pSdh \quad \text{o bien,} \quad dM=-pdV \tag{2}$$

Hallando p en la ecuación de Poisson (1) y sustituyendo en (2), obtenemos la ecuación diferencial del proceso:

$$dW=-\frac{p_0V_0^k}{V^k}\,dV. \tag{3}$$

Integrando (3), se tiene:

$$W=-p_0V_0^k\int\frac{dV}{V^k}=\frac{p_0V_0^k}{(k-1)V^{k-1}}+C. \tag{4}$$

En virtud de la condición inicial $W|_{V=V_0}=0$, de (4) obtenemos

$$C=-\frac{p_0V_0}{k-1}$$

Por lo tanto, el trabajo de compresión adiabática (desde V_0 hasta V) es:

$$W=\frac{p_0V_0}{k-1}\left[\left(\frac{V_0}{V}\right)^{k-1}-1\right]. \tag{5}$$

Para $V=V_1$, resulta:

$$W_1=\frac{p_0V_0}{k-1}\left[\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{k-1}-1\right].$$

110. Hallar una curva que pase por el punto (0, —2) de modo que el coeficiente angular de la tangente en cualquiera de sus puntos sea igual a la ordenada del mismo punto, aumentada tres veces.

111. Hallar una curva para la cual el área Q, limitada por la curva, el eje OX y las dos ordenadas $X = 0$, $X = x$, sea una función dada de y:

$$Q = a^2 \ln \frac{y}{a}.$$

112. Un punto material de masa igual a 1 g se mueve en línea recta debido a la acción de una fuerza que es directamente proporcional al tiempo, calculado desde el instante $t = 0$, e inversamente proporcional a la velocidad del punto. En el instante $t = 10$ s la velocidad era igual a 50 cm/s, y la fuerza, igual a 4 dinas. ¿Qué velocidad tendrá el punto al cabo de un minuto del comienzo del movimiento?

113. Demostrar que la curva que posee la propiedad de que todas sus normales pasan por un punto constante, es una circunferencia.

114. Una bala se introduce en una tabla de $h = 10$ cm de espesor con la velocidad $v_0 = 200$ m/s traspasándola con la velocidad $v_1 = 80$ m/s. Suponiendo que la resistencia de la tabla al movimiento de la bala es proporcional al cuadrado de la velocidad, hallar el tiempo del movimiento de la bala por la tabla.

115. Un barco retrasa su movimiento por la acción de la resistencia del agua, que es proporcional a la velocidad del barco. La velocidad inicial del barco es 10 m/s, después de 5 s su velocidad será 8 m/s. ¿Después de cuánto tiempo la velocidad se hará 1 m/s?

116. Demostrar que la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es proporcional a la abscisa del punto de contacto, es una parábola.

117. Según la ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura T_0 del aire. Si la temperatura del aire es de 20° C y el cuerpo se enfría en 20 min desde 100° hasta 60°, ¿dentro de cuánto tiempo su temperatura descenderá hasta 30°?

118. Hallar la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es n veces mayor que la pendiente de la recta que une este punto con el origen de coordenadas.

119. Determinar el camino S recorrido por un cuerpo durante el tiempo t, si su velocidad es proporcional al trayecto, sabiendo que en 10 s el cuerpo recorre 100 m y en 15 s, 200 m.

120. El fondo de un depósito de 300 litros de capacidad, está cubierto de sal. Suponiendo que la velocidad con que se disuelve la sal es proporcional a la diferencia entre la concentración en el instante dado y la concentración de la disolución saturada (1 kg de sal para 3 litros de agua) y que la cantidad de agua pura dada disuelve 1/3 de kg de sal por min, hallar la cantidad de sal que contendrá la disolución al cabo de una hora.

121. Cierta cantidad de una substancia indisoluble contiene en sus poros 10 kg de sal. Actuando con 90 litros de agua se observó que durante 1 hora se disolvió la mitad de la sal contenida. ¿Cuánta sal se disolvería durante el mismo tiempo si se duplicase la cantidad de agua? La velocidad de disolución es proporcional a la cantidad de sal no disuelta y a la diferencia entre la concentración en el instante dado y la concentración de la disolución saturada (1 kg para 3 litros).

122. Hallar la curva que tiene la propiedad de que el segmento de la tangente a la curva comprendido entre los ejes de coordenadas se divide por la mitad en el punto de contacto.

123. Cierta cantidad de substancia, que contenía 3 kg de humedad, se colocó en una habitación de 100 m^3 de volumen, donde el aire tenía al principio el 25% de humedad. El aire saturado, a esta temperatura, contiene 0,12 kg de humedad por 1 m^3. Si durante el primer día la substancia perdió la mitad de su humedad, ¿qué cantidad de humedad quedará al finalizar el segundo día?

N o t a. La humedad contenida en una substancia porosa se evapora al espacio que la rodea con una velocidad que es proporcional a la cantidad de humedad que hay en la substancia y es también proporcional a la diferencia entre la humedad del aire que la rodea y la humedad del aire saturado.

124. Cierta cantidad de una substancia indisoluble que contiene en sus poros 2 kg de sal se somete a la acción de 30 litros de agua. Después de 5 min se disuelve 1 kg de sal. ¿Dentro de cuánto tiempo se disolverá el 99% de la cantidad inicial de sal?

125. Una pared de ladrillos tiene 30 cm de espesor. Hallar la dependencia de la temperatura de la distancia del punto hasta el borde exterior de la pared, si la temperatura en la superficie interior de la misma es igual a 20° y en la exterior, a 0°. Hallar también la cantidad de calor expedida por la pared (por 1 m^2) al exterior durante un día.

Nota. Según la ley de Newton, la velocidad Q de propagación del calor a través de una superficie A, perpendicular al eje OX, es: $Q = -kS\frac{dT}{dt}$, donde k es el coeficiente de conductibilidad térmica; T, la temperatura; t, el tiempo y S, el área de la superficie A; ($k = 0{,}0015$).

126. Demostrar que la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ con la condición inicial $y|_{x=0} = 0$ tiene infinitas soluciones de la forma $y = Cx$. Esta misma ecuación con la condición inicial $y|_{x=0} = y_0 \neq 0$ no tiene solución alguna. Trazar las curvas integrales.

127. Demostrar que el problema

$$\frac{dy}{dx} = y^{\alpha}, \quad y|_{x=0} = 0$$

tiene al menos dos soluciones para $0 < \alpha < 1$ y una para $\alpha = 1$. Trazar las curvas integrales para $\alpha = \frac{1}{2}$, 1.

128. Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = y\,|\ln y|^{\alpha} \quad (\alpha > 0),$$

que satisface a la condición inicial $y|_{x=0} = 0$. ¿Para qué valores de α tiene solución única?

129. Demostrar que las tangentes a todas las curvas integrales de la ecuación diferencial

$$y' + y \operatorname{tg} x = x \operatorname{tg} x + 1$$

en los puntos de sus intersecciones con el eje OY son paralelas entre sí. Determinar el ángulo bajo el cual se cortan las curvas integrales con el eje OY.

Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:

130. $\cos y' = 0$.

131. $e^{y'} = 1$.

132. $\operatorname{sen} y' = x$.

133. $\ln y' = x$.

134. $\operatorname{tg} y' = 0$.

135. $e^{y'} = x$.

136. $\operatorname{tg} y' = x$.

He aquí algunos problemas en los que se necesita hallar la solución particular conociendo el comportamiento de la solución para $x \to \infty$.

Ejemplo. Hallar la solución de la ecuación

$$x^3 \operatorname{sen} y \cdot y' = 2, \tag{1}$$

que cumple la condición

$$y \to \frac{\pi}{3} \text{ cuando } \quad x \to \infty. \tag{2}$$

Solución. Separando las variables e integrando, hallamos la integral general de la ecuación (1):

$$\cos y = \frac{1}{x^2} + C.$$

La condición (2) nos da: $\cos \frac{\pi}{2} = C$, sea, $C = 0$. De este modo la integral particular tiene la forma: $\cos y = \frac{1}{x^2}$. A ésta le corresponden infinitas soluciones particulares de la forma

$$y = \pm \arccos \frac{1}{x^2} + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3}$$

Entre estas soluciones hay solamente una que cumple la condición (2). Esta se halla pasando al límite en la igualdad (3) para $x \to \infty$.
Resulta:

$$\frac{\pi}{2} = \pm \arccos 0 + 2\pi n, \quad \text{o bien,} \quad \frac{\pi}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

De aquí que

$$\frac{1}{2} = \pm \frac{1}{2} + 2n \tag{4}$$

Fácilmente se observa que (4) tiene dos raíces: $n = 0$ y $n = \frac{1}{2}$; la raíz $n = \frac{1}{2}$ que corresponde al signo menos

ante $\arccos \frac{1}{x^2}$ no vale (n tiene que ser entero o igual a cero). Por lo tanto, la solución particular buscada de la ecuación (1), es:

$$y = \arccos \frac{1}{x^2}.$$

En los siguientes ejercicios hay que hallar las soluciones de las ecuaciones que cumplen las condiciones indicadas para $x \to \pm\infty$.

137. $x^2 y' \cos y + 1 = 0, \quad y \to \frac{16}{3}\pi, \quad x \to +\infty$:

138. $x^2 y' + \cos 2y = 1, \quad y \to \frac{10}{3}\pi, \quad x \to +\infty$.

139. $x^3 y' - \operatorname{sen} y = 1, \quad y \to 5\pi, \quad x \to \infty$.

140. $(1 + x^2)\, y' - \frac{1}{2}\cos^2 2y = 0, \quad y \to \frac{7}{2}\pi, x \to -\infty$.

141. $e^y = e^{4y} y' + 1$, y es acotada para $x \to +\infty$.

142. $(x + 1)\, y' = y - 1$, y es acotada para $x \to +\infty$.

143. $y' = 2x(\pi + y)$, y es acotada para $x \to \infty$.

144. $x^2 y' + \operatorname{sen} 2y = 1, \quad y \to \frac{11}{4}\pi, \quad x \to +\infty$.

§ 6. ECUACIONES HOMOGENEAS Y REDUCIBLES A ELLAS

Una función $f(x, y)$ es homogénea de grado n en sus argumentos si se cumple la identidad

$$f(tx, ty) \equiv t^n f(x, y).$$

Por ejemplo, $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ es una función homogénea de segundo grado, puesto que $f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 - (tx)(ty) = t^2(x^2 + y^2 - xy) = t^2 f(x, y)$.

Para $n=0$, se tiene una función de grado cero. Por ejemplo, $f(x, y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ es una función homogénea de grado cero, puesto que

$$f(tx, ty)=\frac{(tx)^2-(ty)^2}{(tx)^2+(ty)^2}=\frac{t^2(x^2-y^2)}{t^2(x^2+y^2)}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=f(x, y).$$

Una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ se llama homogénea si $f(x, y)$ es una función homogénea de grado cero en sus argumentos. La ecuación homogénea siempre se puede representar en la forma

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1}$$

Introduciendo una nueva función incógnita $u=\frac{y}{x}$, la ecuación (1) se reduce a la ecuación con variables separables:

$$x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u.$$

Si $u=u_0$ es una raíz de la ecuación $\varphi(u)-u=0$, la solución de la ecuación homogénea es, $u=u_0$, o bien, $y=u_0x$ (recta que pasa por el origen de coordenadas).

Observación. Al resolver las ecuaciones homogéneas no es indispensable reducirlas a la forma (1). Se puede hacer inmediatamente la sustitución $y=ux$.

Las ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{2}$$

se reducen a homogéneas trasladando el origen de coordenadas al punto (x_0, y_0) de intersección de las rectas

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \text{y} \quad a_2x+b_2y+c_2=0.$$

Esto se consigue haciendo la sustitución de las variables:

$$x=\xi+x_0, \quad y=\eta+y_0.$$

El método indicado no es aplicable cuando las rectas $a_1x+b_1y+c_1=0$ y $a_2x+b_2y+c_2=0$ son paralelas. Pero, en este caso,

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\lambda,$$

y la ecuación (2) se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx}=f\left[\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_2}\right]=F(a_1x+b_1y), \qquad (3)$$

estudiada en el § 5.

Si la ecuación diferencial viene expresada en la forma

$$P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=0,$$

será homogénea si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones homogéneas de un mismo grado.

A veces, la ecuación se puede reducir a homogénea mediante la sustitución de la variable $y=z^{\alpha}$. Esto ocurre cuando todos los términos de la ecuación son de un mismo grado, atribuyendo el grado 1 a la variable x, el grado α a la variable y, y el grado $\alpha-1$ a la derivada $\frac{dy}{dx}$.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación

$$xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y.$$

Solución. Escribamos la ecuación en la forma

$$y'=\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}.$$

Como la ecuación es homogénea, hacemos $u=\frac{y}{x}$ o bien, $y=ux$. Entonces, $y'=xu'+u$. Sustituyendo en la ecuación las expresiones para y e y', obtenemos

$$x\frac{du}{dx}=\sqrt{1-u^2}.$$

Separamos las variables

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x}.$$

De aquí, integrando hallamos:

$\operatorname{arcsen} u=\ln|x|+\ln C_1$ $(C_1>0)$, o bien, $\operatorname{arcsen} u=\ln C_1|x|$.

Como $C_1|x|=\pm C_1x$, haciendo la notación $\pm C_1=C$, obtenemos $\operatorname{arcsen} u=\ln Cx$,

donde $|\ln Cx| \leqslant \frac{\pi}{2}$, o bien, $e^{-\frac{\pi}{2}} \leqslant Cx \leqslant e^{\frac{\pi}{2}}$. Sustituendo u por $\frac{y}{x}$ tendremos la integral general

$$\arcsen \frac{y}{x} = \ln Cx.$$

Por consiguiente, la solución general es: $y = x \operatorname{sen} \ln Cx$.

Al separar las variables dividíamos ambos miembros de la ecuación por el producto $x\sqrt{1-u^2}$, por lo cual, se podrían perder las soluciones que convierten en cero sus factores. Pongamos ahora $x = 0$ y $\sqrt{1-u^2} = 0$. Pero $x = 0$ no es solución de la ecuación, debido a lo cual resulta, $1 - \frac{y^2}{x^2} = 0$, de donde $y = \pm x$. Con una prueba directa nos convencemos de que las funciones $y = -x$ e $y = x$ son soluciones de la ecuación. Estas son soluciones, singulares de la ecuación dada.

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$(x + y - 2)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0. \tag{1}$$

Solución. Examinemos el sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{array}\right\}.$$

El determinante de este sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

El sistema tiene solución única: $x_0 = -1$, $y_0 = 3$. Hacemos la sustitución $x = \xi - 1$, $y = \eta + 3$. Entonces, la ecuación (1) toma la forma

$$(\xi + \eta)\,d\xi + (\xi - \eta)\,d\eta = 0.$$

Esta es una ecuación homogénea. Haciendo $\eta = u\xi$, obtenemos

$$(\xi + \xi u)\,d\xi + (\xi - \xi u)(\xi\,du + u\,d\xi) = 0,$$

de donde

$$(1 + 2u - u^2)\,d\xi + \xi(1 - u)\,du = 0.$$

Separamos las variables

$$\frac{d\xi}{\xi} + \frac{1-u}{1+2u-u^2}\,du = 0.$$

Integrando, hallamos

$$\ln|\,\xi\,| + \frac{1}{2}\ln|\,1+2u-u^2\,| = \ln C; \quad \xi^2(1+2u-u^2) = C.$$

Volviendo a la variables x, y, obtenemos:

$$(x+1)^2\left[1 + 2\,\frac{y-3}{x+1} - \frac{(y-3)^2}{(x+1)^2}\right] = C_1,$$

o bien,

$$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C, \quad (C = C_1 + 14).$$

Ejemplo 3. Resolver la ecuación

$$(x+y+1)\,dx + (2x+2y-1)\,dy = 0$$

Solución. El sistema de ecuaciones algebraicas lineales

$$\left.\begin{aligned} x+y+1&=0 \\ 2x+2y-1&=0 \end{aligned}\right\}$$

es incompatible. El determinante del sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

En este caso no es aplicable el método empleado en el párrafo anterior. Para integrar la ecuación hacemos la sustitución

$$x+y=z, \quad dy = dz - dx.$$

La ecuación toma la forma

$$(2-z)\,dx + (2z-1)\,dz = 0.$$

Separando las variables obtenemos

$$dx - \frac{2z-1}{z-2}\,dz = 0.$$

De aquí que

$$x - 2z - 3\ln|\,z-2\,| = C.$$

Volviendo a las variables x, y, obtenemos la integral general de la ecuación dada: $x + 2y + 3\ln|x + y - 2| = C$.

Ejemplo 4. Resolver la ecuación

$$(x^2y^2 - 1)\,dy + 2xy^3\,dx = 0.$$

S o l u c i ó n. Hacemos la sustitución $y = z^\alpha$, $dy = \alpha z^{\alpha-1}\,dz$, donde por ahora α es un número arbitrario que se elegirá a continuación. Sustituyendo y y dy en la ecuación por sus expresiones, obtenemos:

$$(x^2z^{2\alpha} - 1)\,\alpha z^{\alpha-1}\,dz + 2xz^{3\alpha}\,dx = 0.$$

o bien

$$(x^2z^{3\alpha-1} - z^{\alpha-1})\,\alpha\,dz + 2xz^{3\alpha}\,dx = 0.$$

Obsérvese que el grado de $x^2z^{3\alpha-1}$ es $2 + 3\alpha - 1 = 3\alpha + 1$, el grado de $z^{\alpha-1}$ es $\alpha - 1$ y el grado de $xz^{3\alpha}$ es $1 + 3\alpha$. La ecuación obtenida será homogénea si los grados de todos los términos resultan iguales, es decir, si se cumple la condición $3\alpha + 1 = a - 1$. De aquí que $\alpha = -1$.

Por consiguiente, tenemos $y = \frac{1}{z}$ la ecuación inicial toma la forma

$$\left(\frac{1}{z^2} - \frac{x^2}{z^4}\right)dz + 2\frac{x}{z^3}\,dx = 0,$$

o bien,

$$(z^2 - x^2)\,dz + 2zx\,dx = 0.$$

Pongamos ahora $z = ux$, $dz = u dx + x\,du$. Entonces, esta ecuación toma la forma $(u^2 - 1)(u\,dx + x\,du) + 2u\,dx = 0$.

De donde

$$u(u^2 + 1)\,dx + x(u^2 - 1)\,du = 0.$$

Separando las variables en esta ecuación, obtenemos:

$$\frac{dx}{x} - \frac{u^2 - 1}{u^3 + u}\,du = 0.$$

Integrando, hallamos:

$$\ln|x| + \ln(u^2 + 1) - \ln|u| = \ln C,$$

o bien,

$$\frac{x(u^2 + 1)}{u} = C.$$

Sustituyendo u por $\frac{1}{xy}$, obtenemos la integral general de la ecuación considerada: $1 + x^2y^2 = Cy$

La ecuación tiene además la solución trivial $y = 0$, que se obtiene de la integral general escribiéndola en la forma $y = \frac{1 + x^2y^2}{C}$ y pasando después a límites para $C \to \infty$. Por consiguiente, la función $y = 0$ es una solución particular de la ecuación dada.

Integrar las ecuaciones:

145. $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0.$

146. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}.$

147. $4x^2 - xy + y^2 + y'(x^2 - xy + 4y^2) = 0.$

148. $4x^2 + xy - 3y^2 + y'(-5x^2 + 2xy + y^2) = 0.$

149. $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}.$

150. $2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2).$

151. $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}.$

152. $ax^2 + 2bxy + cy^2 + y'(bx^2 + 2cxy + fy^2) = 0.$

153. $(y^4 - 3x^2)\,dy = -xy\,dx.$

154. $y^3\,dx + 2(x^2 - xy^2)\,dy = 0.$

155. $(y - xy')^2 = x^2 + y^2.$

156. $3x + y - 2 + y'(x - 1) = 0.$

157. $2x + 2y - 1 + y'(x + y - 2) = 0.$

158. $(3y - 7x + 7)\,dx - (3x - 7y - 3)\,dy = 0.$

159. $(y + y\sqrt{x^2y^4 + 1})\,dx + 2x\,dy = 0.$

160. $4xy^2\,dx + (3x^2y - 1)\,dy = 0.$

161. $(x + y^3)\,dx + (3y^5 - 3y^2x)\,dy = 0.$

162. $2(x^2y + \sqrt{1 + x^4y^2})\,dx + x^3\,dy = 0.$

163. $(2x - 4y)\,dx + (x + y - 3)\,dy = 0.$

164. $(x - 2y - 1)\,dx + (3x - 6y + 2)\,dy = 0.$

165. $(x - y + 3)\,dx + (3x + y + 1)\,dy = 0.$

166. $(x + y)\,dx + (x + y - 1)\,dy = 0.$

167. $y \cos x\,dx + (2y - \operatorname{sen} x)\,dy = 0.$

168. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0.$

169. $y^3\,dy + 3y^2x\,dx + 2x^3\,dx = 0.$

170. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0.$

171. Hallar una curva que posea la propiedad de que la magnitud de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a la tangente sea igual a la abscisa del punto de contacto.

172. Hallar la curva para la cual la razón del segmento interceptado por la tangente en el eje OY al radio-vector es una cantidad constante.

173. Empleando coordenadas rectangulares, hallar la forma del espejo si los rayos que parten de un punto dado, al reflejarse, son paralelos a una dirección dada.

174. Hallar la curva para la cual la longitud del segmento interceptado en el eje de ordenadas por la normal a cualquiera de sus puntos, es igual a la distancia desde este punto al origen de coordenadas.

175. Hallar la curva para la cual el producto de la abscisa de cualquiera de sus puntos por la magnitud del segmento interceptado en el eje OY por la normal, es igual al duplo del cuadrado de la distancia desde este punto al origen de coordenadas.

§ 7. ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN ECUACIONES DE BERNOULLI

Se llama ecuación diferencial lineal de primer orden a la que es lineal con respecto a la función incógnita y su derivada. Esta tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x), \tag{1}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones continuas de x en la región en que se pida integrar la ecuación (1).

Si $q(x) \not\equiv 0$, la ecuación (1) se llama lineal no homogénea. Si $q(x) \equiv 0$, se dice que la ecuación (1) es lineal homogénea. Esta última es una ecuación con variables separables y posee la solución general

$$y = ce^{-\int p(x)\,dx} \tag{2}$$

La solución general de la ecuación lineal no homogénea se puede hallar por el método de variación de la constante, según el cual se busca una solución de la ecuación (1) de la forma

$$y = c(x)\,e^{-\int p(x)\,dx},$$

donde $c(x)$ es una función incógnita nueva de x.

La ecuación (1) se puede integrar también del modo siguiente. Hacemos

$$y = u(x)\,v(x). \tag{3}$$

Poniendo (3) en (1), después de las transformaciones obtenemos:

$$u'v + u(pv + v') = q(x). \tag{4}$$

Determinando $v(x)$ de la condición $v' + pv = 0$, hallamos después la función $u(x)$ resolviendo la ecuación (4), obteniendo, por consiguiente, la solución $y = uv$ de la ecuación (1). En este caso, $v(x)$ es una solución particular cualquiera de la ecuación $v' + pv = 0$ (distinta de la solución trivial $v \equiv 0$).

Observación. Puede ocurrir que la ecuación diferencial sea lineal respecto a x, considerada esta variable como función de y. La forma normal de tal ecuación es: $\frac{dx}{dx} + r(y)\,x = \varphi(y)$.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}. \tag{5}$$

Solución. Apliquemos el método de variación de la constante. Consideremos la ecuación homogénea

$$y' + 2xy = 0,$$

correspondiente a la ecuación no homogénea dada. Esta es una ecuación con variables separables. Su solución general tiene la forma

$$y = ce^{-x^2}.$$

Buscamos la solución general de la ecuación no homogénea en la forma

$$y = c(x)\,e^{-x^2} \tag{6}$$

donde $c(x)$ es una función incógnita de x.

Poniendo (6) en (5), obtenemos $c'(x) = 2x$. De donde $c(x) = x^2 + c$. Resumiendo, la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y = (x^2 + c)\,e^{-x^2},$$

donde c es la constante de integración.

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \operatorname{sen} 2y}.$$

S o l u c i ó n. La ecuación dada es lineal, considerando x como function de y:

$$\frac{dx}{dy} - x\cos y = \operatorname{sen} 2y. \tag{7}$$

Buscamos la solución general de la ecuación en la forma $x = u(y)\cdot v(y)$. Se tiene

$$\frac{dx}{dy} = v\,\frac{du}{dy} + u\,\frac{dv}{dy}.$$

Sustituyendo x y $\frac{dx}{dy}$ en ecuación (7), obtenemos

$$v\,\frac{du}{dy} + u\left(\frac{dv}{dy} - v\cos y\right) = \operatorname{sen} 2y.$$

Hallamos $v(y)$ de la condición

$$\frac{dv}{dy} - v\cos y = 0.$$

Tomamos cualquier solución particular (no trivial) de esta ecuación, por ejemplo $v(y) = e^{\operatorname{sen} y}$. Entonces,

$$e^{\operatorname{sen} y}\,\frac{du}{dy} = \operatorname{sen} 2y.$$

De donde

$$u = \int e^{-\operatorname{sen} y} \operatorname{sen} 2y \, dy = -2e^{-\operatorname{sen} y}(1 + \operatorname{sen} y) + c.$$

Por consiguiente, la solución general es

$$x = ce^{\operatorname{sen} y} - 2 \operatorname{sen} y - 2.$$

Ecuación de Bernoulli. Esta es una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x)\, y^n, \tag{8}$$

donde $n \neq 0$; 1, puesto que para $n = 0$ y $n = 1$ esta ecuación es lineal. La ecuación (8) se reduce a una ecuación lineal haciendo la sustitución $z = \frac{1}{y^{n-1}}$. Pero resulta más conveniente resolver la ecuación de Bernoulli haciendo la sustitución (sin reducirla a lineal) $y = u(x)v(x)$.

Ejemplo. Resolver la ecuación de Bernoulli:

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

Solución. Hagamos $y = u(x)v(x)$. Tendremos

$$xvu' + u(xv' + v) = u^2v^2 \ln x.$$

Hallamos la función $v(x)$ como solución particular de la ecuación $xv' + v = 0$. Resulta, $v(x) = \frac{1}{x}$. Entonces, $u' = \frac{u^2}{x^2} \ln x$. Separando las variables e integrando, obtenemos

$$-\frac{1}{u} = \int \frac{\ln x}{x^2}\, dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - c,$$

o sea,

$$u = \frac{x}{1 + cx + \ln x}.$$

La solución general de la ecuación es:

$$y = \frac{1}{1 + cx + \ln x}.$$

Integrar las ecuaciones:

176. $y' + 2y = x^2 + 2x$.

177. $(x^2 + 2x - 1)\, y' - (x + 1)\, y = x - 1$.

178. $x \ln x \cdot y' - y = x^3 (3 \ln x - 1)$.

179. $(a^2 - x^2)\, y' + xy = a^2$.

180. $2xy' - y = 3x^2$.

181. $(x + 1)\, dy - [2y + (x + 1)^4]\, dx = 0$.

182. $y' = \dfrac{1}{x \operatorname{sen} y + 2 \operatorname{sen} 2y}$.

183. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.

184. $x(x^3 + 1)\, y' + (2x^3 - 1)\, y = \dfrac{x^3 - 2}{x}$.

185. $y' + y \cos x = \operatorname{sen} x \cos x, \quad y \big|_{x=0} = 1$.

186. $x \ln x \cdot y' - (1 + \ln x)\, y + \frac{1}{2} \sqrt{x}\, (2 + \ln x) = 0$.

187. $3xy' - 2y = \dfrac{x^3}{y^2}$.

188. $8xy' - y = -\dfrac{1}{y^3 \sqrt{x + 1}}$.

189. $(xy + x^2 y^3)\, y' = 1$.

190. $y' - y = 2xe^{x + x^2}$.

191. $xy' = y + x^2 \operatorname{sen} x$.

192. $x^2 y' + 2x^3 y = y^2 (1 + 2x^2)$.

193. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2}$.

194. $2 \operatorname{sen} x \cdot y' + y \cos x = y^3 (x \cos x - \operatorname{sen} x)$.

195. $y' = \dfrac{3x^2}{x^3 + y + 1}$.

196. $y' + y \dfrac{x + \frac{1}{2}}{x^2 + x + 1} = \dfrac{(1 - x^2)\, y^2}{(x^2 + x + 1)^{3/2}}$.

197. $3y' + y \dfrac{x^2 + a^2}{x(x^2 - a^2)} = \dfrac{1}{y^2} \dfrac{x(3x^2 - a^2)}{x^2 - a^2}$.

198. $(1 + x^2)\, y' = xy + x^2 y^2$.

199. $y' + \dfrac{y}{x + 1} = -\frac{1}{2} (x + 1)^3 y^2$.

200. $(x^2+y^2+1)\,dy+xy\,dx=0.$

201. $y'=\frac{y}{2y\ln y+y-x}.$

202. $x(x-1)y'+y=x^2(2x-1).$

203. $y'-y\operatorname{tg}x=\sec x,\quad y|_{x=0}=0.$

204. $y'\cos y+\operatorname{sen}y=x+1.$

205. $y'+\operatorname{sen}y+x\cos y+x=0.$

206. $y'-\frac{ny}{x+1}=e^x(1+x)^n.$

207. $\int\limits_0^1 \varphi(\alpha x)\,d\alpha=n\varphi(x).$

208. $y'+x\operatorname{sen}2y=xe^{-x^2}\cos^2 y$ (la sustitución $t=\operatorname{tg}y$).

En los problemas que se dan a continuación hay que hallar las soluciones de las ecuaciones que satisfacen a las condiciones indicadas:

209. $y'-2xy=\cos x-2x\operatorname{sen}x,$
y es una función acotada cuando $x\to\infty$.

210. $2\sqrt{x}\,y'-y=-\operatorname{sen}\sqrt{x}-\cos\sqrt{x},$
y es acotada cuando $x\to+\infty$.

211. $y'-y\ln 2=2^{\operatorname{sen}x}(\cos x-1)\ln 2,$
y es acotada cuando $x\to+\infty$.

212. $2x^2y'-xy=2x\cos x-3\operatorname{sen}x,$
$y\to 0$ cuando $x\to+\infty$.

213. $y'\operatorname{sen}x-y\cos x=-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2},$
$y\to 0$ cuando $x\to\infty$.

214. $(1+x^2)\ln(1+x^2)\,y'-2xy=\ln(1+x^2)-2x\operatorname{arctg}x,$
$y\to-\frac{\pi}{2}$ cuando $x\to-\infty$.

215. $y'-e^xy=\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x}-e^x\cos\frac{1}{x},$
$y\to 2$ cuando $x\to-\infty$.

216. $y'-y\ln x=-(1+2\ln x)\,x^{-x},$
$y\to 0$ cuando $x\to+\infty$.

§ 8. ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS FACTOR INTEGRANTE

La ecuación diferencial de la forma

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

se llama ecuación diferencial exacta si su primer miembro es la diferencial total de una función $u(x, y)$:

$$M\,dx + N\,dy \equiv du \equiv \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy.$$

La condición necesaria y suficiente para que la ecuación (1) sea una ecuación diferencial exacta es que se cumpla la condición

$$\frac{\partial M}{dy} \equiv \frac{\partial N}{dx} \tag{2}$$

(en un recinto simplemente conexo D de variación de x, y). La integral general de la ecuación (1) tiene la forma $u(x, y) = C$, o bien,

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy = C. \tag{3}$$

Ejemplo. Resolver la ecuación diferencial

$$(\operatorname{sen} xy + xy\cos xy)\,dx + x^2\cos xy\,dy = 0.$$

Solución. Comprobemos que la ecuación dada es una ecuación diferencial exacta. Se tiene

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{sen} xy + xy\cos xy) =$$

$$= x\cos xy + x\cos xy - x^2y\operatorname{sen} xy = 2x\cos xy - x^2y\operatorname{sen} xy,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2\cos xy) = 2x\cos xy - x^2y\operatorname{sen} xy,$$

o sea,

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Como vemos, se cumple la condición (2). Por consiguiente,

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} (\operatorname{sen} xy + xy \cos xy)\, dx + \int_{y_0}^{y} x_0^2 \cos x_0 y\, dy =$$

$$= x \operatorname{sen} xy \Big|_{x_0}^{x} + x_0 \operatorname{sen} x_0 y \Big|_{y_0}^{y} = x \operatorname{sen} xy - x_0 \operatorname{sen} x_0 y_0;$$

de modo que

$$x \operatorname{sen} xy = C + x_0 \operatorname{sen} x_0 y_0, \text{ o bien, } x \operatorname{sen} xy = C_1.$$

Al resolver agunas ecuaciones diferenciales se pueden agrupar los términos de tal modo que resulten combinaciones fáciles de integrar.

Ejemplo. Resolver la ecuación diferencial

$$(x^3 + xy^2)\, dx + (x^2 y + y^3)\, dy = 0. \qquad (2')$$

Solución. En este caso, $\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$, y se cumple la condición (2); por consiguiente, tenemos una ecuación diferencial exacta. Esta se reduce a la forma $du = 0$ mediante una agrupación directa de sus términos. En efecto, escribámosla en la forma

$$x^3\, dx + xy(y\, dx + x\, dy) + y^3\, dy = 0.$$

Aquí

$$x^3\, dx = d\left(\frac{x^4}{4}\right), \qquad xy(y\, dx + x\, dy) = xy d(xy) = d\left(\frac{(xy)^2}{2}\right),$$

$$y^3\, dy = d\left(\frac{y^4}{4}\right).$$

Por lo tanto, la ecuación (2') se puede escribir así

$$d\left(\frac{x^4}{4}\right) + d\left(\frac{(xy)^2}{2}\right) + d\left(\frac{y^4}{4}\right) = 0,$$

o bien, así

$$d\left[\frac{x^4}{4} + \frac{(xy)^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right] = 0, \qquad (2'')$$

Por consiguiente, la integral general de la ecuación (2''), y de la ecuación (2'), es:

$$x^4 + 2(xy)^2 + y^4 = C.$$

En algunos casos, por cierto muy excepcionales, cuando (1) no representa una ecuación diferencial exacta, se con-

sigue hallar una función $\mu(x, y)$ tal que al multiplicar el primer miembro de (1) por ella, resulta una diferencial total:

$$du = \mu M\,dx + \mu N\,dy. \tag{4}$$

Tal función $\mu(x, y)$ se llama factor integrante, Según la definición de factor integrante se tiene

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

o bien

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu,$$

de donde

$$N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{5}$$

Para hallar el factor integrante, hemos obtenido una ecuación en derivadas parciales.

Indiquemos unos casos particulares en que fácilmente se puede hallar la solución de la ecuación (5), o sea, el factor integrante.

1. $\mu = \mu(x)$. En este caso, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ y la ecuación (5) toma la forma

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \tag{6}$$

Para que exista un factor integrante no dependiente de y es necesario y suficiente que el segundo miembro de (6) dependa solamente de x. En este caso, $\ln \mu$ se halla por cuadraturas.

Ejemplo 1. Examinemos la ecuación

$$(x + y^2)\,dx - 2yx\,dy = 0.$$

Solución. Aquí

$$M = x + y^2, \quad N = -2xy.$$

Se tiene

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y + 2y}{-2xy} = -\frac{2}{x}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = -\frac{2}{x}, \quad \ln \mu = -2 \ln |x|, \quad \mu = \frac{1}{x^2}.$$

La ecuación

$$\frac{x + y^2}{x^2} dx - 2 \frac{xy}{x^2} dy = 0$$

es una ecuación diferencial exacta. Su primer miembro se puede representar en la forma

$$\frac{dx}{x} - \frac{2xy\,dy - y^2\,dx}{x^2} = 0.$$

De donde

$$d\left(\ln|x| - \frac{y^2}{x}\right) = 0$$

y la integral general de la ecuación dada es:

$$x = C \cdot e^{\frac{y^2}{x}}.$$

2. Análogamente, si $\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{1}{M}$ depende solamente de y, la ecuación (1) tiene un factor integrante $\mu = \mu(y)$ que depende solamente de y.

Ejemplo 2. $2xy \ln y\,dx + \left(x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}\right) dy = 0$.

Solución. Aquí $M = 2xy \ln y$, $N = x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}$.

Se tiene $$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{2x - 2x(\ln y + 1)}{2xy \ln y} = -\frac{1}{y}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = -\frac{1}{y}, \quad \mu = \frac{1}{y}.$$

La ecuación

$$\frac{2xy \ln y\,dx}{y} + \frac{x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}}{y} dy = 0$$

es una ecuación diferencial exacta y puede escribirse de la forma $d(x^2 \ln y) + y\sqrt{y^2+1}\,dy = 0$, de donde

$$x^2 \ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)^{\frac{3}{2}} = C.$$

Ejemplo 3. Resolver la ecuación

$$(3x+2y+y^2)\,dx+(x+4xy+5y^2)\,dy=0,$$

si su factor integrante es de la forma $\mu=\varphi(x+y^2)$

S o l u c i ó n. Hagamos $z=x+y^2$. Entonces $\mu=\varphi(z)$ y, por consiguiente,

$$\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=\frac{d\ln\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{d\ln\mu}{dz},$$

$$\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=\frac{d\ln\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{d\ln\mu}{dz}\cdot 2y.$$

La ecuación (5) para hallar el factor integral tiene la forma

$$(N-2My)\frac{d\ln\mu}{dz}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$$

o bien

$$\frac{d\ln\mu}{dz}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N-2My}.$$

Como $M=3x+2y+y^2$, $N=x+4xy+5y^2$, resulta

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N-2My}=\frac{1}{x+y^2}=\frac{1}{z},$$

por lo cual $\frac{d\ln\mu}{dz}=\frac{1}{z}$, de donde $\mu=z$, o sea, $\mu=x+{}$ $+y^2$. Multiplicando la ecuación dada por $\mu=x+y^2$ obtenemos

$$(3x^2+2xy+4xy^2+2y^3+y^4)\,dx+$$
$$+(x^2+4x^2y+6xy^2+4xy^3+5y^4)\,dy=0.$$

Esta es una ecuación diferencial exacta y según (3), su integral general es

$$\int_{x_0}^{x}(3x^2+2xy+4xy^2+2y^3+y^4)\,dx+$$
$$+\int_{y_0}^{y}(x_0^2+4x_0^2y+6x_0y^2+4x_0y^3+5y^4)\,dy=C,$$

o bien,

$$x^3+x^2y+2x^2y^2+2xy^3+xy^4+y^5=\tilde{C}$$

donde $\tilde{C} = C + x_0^2 y_0 + 2x_0^2 y_0^2 + 2x_0 y_0^3 + x_0 y_0^4 + y_0^5 + x_0^3$. Después de hacer unas transformaciones sencillas resulta

$$(x + y)(x + y^2)^2 = \tilde{C}.$$

Integrar las ecuaciones:

217. $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)\,y' = 0.$

218. $(3x^2 + 6xy^2\,dx + (6x^2 y + 4y^3)\,dy = 0.$

219. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right) dy = 0.$

220. $\left(3x^2 \operatorname{tg} y - \frac{2y^3}{x^3}\right) dx + \left(x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right) dy = 0.$

221. $\left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y}\right) dx = \frac{x^2 + y^2}{xy^2}\,dy.$

222. $\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{y} + x\right) dx + \left(y - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{y^2}\right) dy = 0.$

223. $(3x^2 - 2x - y)\,dx + (2y - x + 3y^2)\,dy = 0.$

224. $\left(\frac{xy}{\sqrt{1 + x^2}} + 2xy - \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sqrt{1 + x^2} + x^2 - \ln x\right) dy = 0.$

225. $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0.$

226. $\left(\operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x + \frac{1}{x}\right) dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right) dy = 0.$

227. $\frac{y + \operatorname{sen} x \cos^2 xy}{\cos^2 xy}\,dx + \left(\frac{x}{\cos^2 xy} + \operatorname{sen} y\right) dy = 0.$

228. $\frac{2x\,dx}{y^3} + \frac{(y^2 - 3x^2)\,dy}{y^4} = 0, \quad y\big|_{x=1} = 1.$

229. $\{n \cos(nx + my) - m \operatorname{sen}(mx + ny)\}\,dx + \{m \cos(nx + my) - n \operatorname{sen}(mx + ny)\}\,dy = 0.$

230. $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2)}} + \left(\frac{1}{y\sqrt{y^2 - x^2}} + \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^2}\right) \times (y\,dx - x\,dy) = 0.$

231. $\left(\frac{1}{y}\,\text{sen}\,\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1\right)dx +$

$$+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\,\text{sen}\,\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right)dy = 0.$$

232. $y(x^2 + y^2 + a^2)\,dy + x(x^2 + y^2 - a^2)\,dx = 0.$

233. $(x^2 + y^2 + 1)\,dx - 2xy\,dy = 0, \quad \mu = \varphi(y^2 - x^2).$

234. $(1 - x^2y)\,dx + x^2(y - x)\,dy = 0, \quad \mu = \varphi(x).$

235. $(3x^2y + y^3)\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy = 0.$

236. $x\,dx + y\,dy + x(x\,dy - y\,dx) = 0, \ \mu = \varphi(x^2 + y^2).$

237. $(x^2 + y)\,dx - x\,dy = 0, \quad \mu = \varphi(x).$

238. $(x + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0, \quad \mu = \varphi(x).$

239. $(2x^2y + 2y + 5)\,dx + (2x^3 + 2x)\,dy = 0, \ \mu = \varphi(x).$

240. $(x^4 \ln x - 2xy^3)\,dx + 3x^2y^2\,dy = 0, \quad \mu = \varphi(x).$

241. $(x + \text{sen}\,x + \text{sen}\,y)\,dx + \cos y\,dy = 0, \quad \mu = \varphi(x).$

242. $(2xy^2 - 3y^3)\,dx + (7 - 3xy^2)\,dy = 0, \quad \mu = \varphi(y).$

243. $(3y^2 - x)\,dx + (2y^3 - 6xy)\,dy = 0, \ \mu = \varphi(x + y^2).$

§ 9. ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN NO RESUELTAS CON RESPECTO A LA DERIVADA

I. ECUACION DE PRIMER ORDEN Y DE GRADO n CON RESPECTO A y'.

$$(y')^n + p_1(x, y)(y')^{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + p_{n-1}(x, y)\,y' + p_n(x, y) = 0. \quad (1)$$

Resolvemos esta ecuación con respecto a y'. Sean

$$y' = f_1(x, y), \ y' = f_2(x, y), \ \ldots, \ y' = f_k(x, y) \ (k \leqslant n) \quad (2)$$

las soluciones reales de la ecuación (1).

El conjunto de las integrales

$$\Phi_1(x, y, C)=0,\ \Phi_2(x, y, C)=0, \ldots, \Phi_k(x, y, C)=0, \quad (3)$$

donde $\Phi_i(x, y, C)=0$ es la integral de la ecuación $y'=f_i(x, y)$ $(i=1, \ldots, k)$, representa la integral general de la ecuación (1).

Por lo tanto, por cada punto del dominio en que y' toma valores reales, pasan «k» curvas integrales.

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$yy'^2+(x-y)y'-x=0.$$

Solución. Despejando y', tenemos

$$y'=\frac{y-x\pm\sqrt{(x-y)^2+4xy}}{2y},$$

o bien, $y'=1$, $y'=-\frac{x}{y}$ de donde

$$y=x+C, \quad y^2+x^2=C^2.$$

Integrar las siguientes ecuaciones:

244. $y'^2-(2x+y)y'+(x^2+xy)=0.$

245. $xy'^2+2xy'-y=0.$

246. $4y'^2-9x=0.$

247. $y'^2-2yy'=y^2(e^x-1).$

248. $x^2y'^2+3xyy'+2y^2=0.$

249. $xy'^2-2yy'+x=0.$

250. $y'^2-2xy'-8x^2=0.$

251. $y'^3+(x+2)e^y=0.$

252. $y'^3-yy'^2-x^2y'+x^2y=0.$

2. ECUACIONES DE LA FORMA $f(y, y')=0$ y $f(x, y')=0$.

Si en estas ecuaciones se puede despejar y', resultan ecuaciones con variables separables.

Por consiguiente, son de interés los demás casos.

a) En la ecuación $f(y, y')=0$ se puede despejar y:

$$y=\varphi(y').$$

Hacemos $y'=p$. Entonces, $y=\varphi(p)$.

Diferenciando esta ecuación y sustituyendo dy por pdx, obtenemos

$$p\,dx = \varphi'(p)\,dp,$$

de donde

$$dx = \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp \quad \text{y} \quad x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp + C.$$

Obtenemos la solución general de la ecuación en forma paramétrica

$$\left.\begin{array}{l} x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp + C \\ y = \varphi(p) \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Ejemplo. $y = a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + b\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ (a, b, son constantes).

Solución. Hacemos $\frac{dy}{dx} = p$ y, por lo tanto, $y = ap^2 + bp^3$.

$dy = 2ap\,dp + 3bp^2\,dp$, o bien, $p\,dx = 2ap\,dp + 3bp^2\,dp$.

De aqui que $dx = 2a\,dp + 3bp\,dp$, y, $x = 2ap + \frac{3}{2}bp^2 + C$. La solución general es

$$\left.\begin{array}{l} x = 2ap + \frac{3}{2}bp^2 + C \\ y = ap^2 + bp^3 \end{array}\right\}.$$

b) En la ecuación $f(y, y') = 0$ no puede despejarse ni y ni y' (o se despejan con dificultad), pero estas últimas pueden expresarse en forma paramétrica mediante algún parámetro t:

$$y = \varphi(t), \quad b = \psi(t) \quad \left(p = \frac{dy}{dx}\right).$$

Entonces, $dy = p\,dx = \psi(t)\,dx$.

Por otra parte, $dy = \varphi'(t)\,dt$, de modo que $\psi(t)\,dx = \varphi'(t)\,dt$ *y* $dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt$.

De donde

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt.$$

Por consiguiente, obtenemos la solución general de la ecuación diferencial dada en forma paramétrica

$$\left.\begin{aligned} x &= \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C \\ y &= \varphi(t) \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Ejemplo. $y^{2/3} + (y')^{2/3} = 1$.

Solución. Hacemos

$$y = \cos^3 t, \quad y' = p = \operatorname{sen}^3 t,$$

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{-3\cos^2 t \operatorname{sen} t\,dt}{\operatorname{sen}^3 t} = -3\,\frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt.$$

De donde

$$x = \int \left(3 - \frac{3}{\operatorname{sen}^2 t}\right) dt = 3t + 3\operatorname{ctg} t + C.$$

La solución general es

$$\left.\begin{aligned} x &= 3t + 3\operatorname{ctg} t + C \\ y &= \cos^3 t \end{aligned}\right\}.$$

c) Ecuación de la $f(x, y') = 0$. Supongamos que en esta ecuación se puede despejar x: $x = \varphi(y')$. Haciendo $y' = p$, obtenemos

$$dx = \varphi'(p)\,dp.$$

Pero $dx = \frac{dy}{p}$ y, por consiguiente, $\frac{dy}{p} = \varphi'(p)\,dp$, de modo que

$$dy = p\varphi'(p)\,dp, \quad \text{y,} \quad y = \int p\varphi'(p)\,dp + C.$$

Por lo tanto, tenemos la solución general de la ecuación en forma paramétrica (p es un parámetro):

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(p) \\ y &= \int \varphi'(p)\,p\,dp + C \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Observación. En las ecuaciones (1) y (3) no se puede considerar p como la derivada, sino como un parámetro.

Ejemplo. $a\frac{dy}{dx} + b\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x$.

Solución.

$$\frac{dy}{dx}=p,\ x=ap+bp^2,\ dx=a\,dp+2bp\,dp,$$
$$dy=p\,dx=ap\,dp+2bp^2\,dp,$$
$$y=\frac{a}{2}p^2+\frac{2}{3}bp^3+C.$$

Así, pues,

$$\left.\begin{aligned}x&=ap+bp^2\\ y&=\frac{a}{2}p^2+\frac{2}{3}bp^3+C\end{aligned}\right\}\ \text{es la solución general.}$$

Por analogía con el caso b), se puede probar resolver la ecuación $f(x,\ y')=0$ introduciendo un parámetro t. Integrar las siguientes ecuaciones:

253. $y=y'^2e^{y'}$.

254. $y'=e^{\frac{y'}{y}}$.

255. $x=\ln y'+\operatorname{sen} y'$.

256. $x=y'^2-2y'+2$.

257. $y=y'\ln y'$.

258. $y=\operatorname{arc\,sen} y'+\ln(1+y'^2)$.

259. $y=(y'-1)e^{y'}$.

260. $y'^2x=e^{\frac{1}{y'}}$.

261. $x(1+y'^2)=1$.

262. $x(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}=a$.

263. $y^{\frac{2}{5}}+y'^{\frac{2}{5}}=a^{\frac{2}{5}}$.

264. $y^4-y'^4-yy'^2=0$.

265. $x=y'+\operatorname{sen} y'$.

266. $y=y'(1+y'\cos y')$.

3. ECUACIONES DE LAGRANGE Y CLAIRAUT

a) La ecuación de Lagrange tiene la forma:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y').$$

Haciendo $y' = p$, diferenciando y sustituyendo dy por $p\,dx$, reducimos esta ecuación a otra que considerada en x como función de p es lineal. Resolviendo esta última $x = r(p, C)$, obtenemos la solución general de la ecuación inicial en forma paramétrica:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(p, C) \\ y &= r(p, C)\varphi(p) + \psi(p) \end{aligned}\right\} \text{(} p \text{ es un parámetro).}$$

Además, la ecuación de Lagrange puede tener soluciones singulares (véase § 11) de la forma $y = \varphi(c)x + \psi(c)$, donde c es una raíz de la ecuación $c = \varphi(c)$.

Ejemplo. Integrar la ecuación

$$y = 2xy' + \ln y'.$$

Solución. Hacemos $y' = p$. Entonces, $y = 2xp + \ln p$.

Diferenciando, hallamos

$$p\,dx = 2p\,dx + 2x\,dp + \frac{dp}{p},$$

de donde

$$p\frac{dx}{dp} = -2x - \frac{1}{p}, \quad \text{o bien,} \quad \frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x - \frac{1}{p^2}.$$

Hemos obtenido una ecuación de 1[er] orden, que respecto de x es lineal. Resolviéndola hallamos

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}.$$

Poniendo el valor hallado de x en la expresión de y, resulta

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p} \\ y &= \ln p + \frac{2C}{p} - 2 \end{aligned}\right\}.$$

b) *La ecuación de Clairaut* es de la forma

$$y = xy' + \psi(y').$$

El método de resolución es el mismo que para la ecuación de Lagrange. La solución general de la ecuación de Clairaut tiene la forma

$$y = Cx + \psi(C).$$

La ecuación de Clairaut puede tener también una solución singular, que se obtiene eliminando p entre las ecuaciones

$$y = xp + \psi(p), \quad x + \psi'(p) = 0.$$

Ejemplo. Integrar la ecuación

$$y = xy' + \frac{a}{2y'} \quad (a = \text{const}).$$

Solución. Haciendo $y' = p$, obtenemos

$$y = xp + \frac{a}{2p}.$$

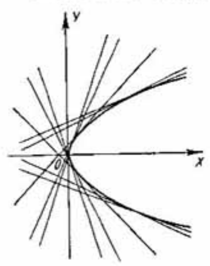


Fig. 12

Diferenciando esta última ecuación y sustituyendo dy por $p\,dx$, hallamos $p\,dx = p\,dx + x\,dp - \frac{a}{2p^2}dp$, de donde

$$dp\left(x - \frac{a}{2p^2}\right) = 0.$$

Examinemos los dos factores del primer miembro de la última ecuación.

Igualando a cero el primer factor, tenemos

$$dp = 0,$$

de donde $p = C$, y la solución general de la ecuación inicial es

$$y = Cx + \frac{a}{2C}.$$

Este es un haz monoparamétrico de rectas.

Igualando a cero el segundo factor tendremos:

$$x = \frac{a}{2p^2}.$$

Eliminando p entre esta ecuación y la ecuación $y = xp + \frac{a}{2p}$, resulta $y^2 = 2ax$. Esta también es una solución de la ecuación considerada (solución singular).

Desde el punto de vista geométrico la curva $y^2 = 2ax$ es la envolvente del haz de rectas determinado por la solución general (fig. 12).

Integrar las siguientes ecuaciones:

267. $2y = xy' + y' \ln y'$.

268. $y = 2xy' + \ln y'$.

269. $y = x(1 + y') + y'^2$.

270. $y = 2xy' + \operatorname{sen} y'$.

271. $y = xy'^2 - \frac{1}{y'}$.

272. $y = \frac{3}{2} xy' + e^{y'}$.

273. $y = xy' + \frac{a}{y'^2}$.

274. $y = xy' + y'^2$.

275. $xy'^2 - yy' - y' + 1 = 0$.

276. $y = xy' + a\sqrt{1 + y'^2}$.

277. $y = xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}$.

278. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$.

279. Hallar la curva cuya tangente forma con los ejes coordenados un triángulo de área constante $S = 2a^2$.

280. Hallar la curva para la cual el segmento de la tangente comprendido entre los ejes coordenados tiene una longitud constante a.

§ 10. COMPOSICION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE LAS FAMILIAS DE CURVAS. PROBLEMAS DE TRAYECTORIAS

1. Composición de las ecuaciones diferenciales de las familias de curvas.

Sea dada la ecuación de una familia monoparamétrica de curvas planas

$$y = \varphi(x,\ a) \quad (a \text{ es un parámetro}). \tag{1}$$

Derivando (1) respecto de x, hallamos

$$y' = \varphi'_x(x,\ a). \tag{2}$$

Eliminando el parámetro "a" entre (1) y (2), obtenemos la ecuación diferencial

$$F(x,\ y,\ y') = 0, \tag{3}$$

que expresa una propiedad común de todas las curvas de la familia (1).

La ecuación (3) es la ecuación diferencial buscada de la familia (1).

Si una familia monoparamétrica de curvas se determina por la ecuación

$$\Phi(x,\ y,\ a) = 0, \tag{4}$$

se obtiene la ecuación diferencial eliminando el parámetro "a" entre las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x,\ y,\ a) &= 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\, y' &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Supongamos ahora que se da la relación

$$\Phi(x,\ y,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) = 0, \tag{6}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son parámetros. Derivando (6) respecto de x, n veces, y eliminando los parámetros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ entre (6) y las ecuaciones obtenidas, obtenemos una relación de la forma

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{7}$$

Esta es la ecuación diferencial de la familia n-paramétrica de curvas (6) dada, en el sentido de que (6) es la integral general de la ecuación (7).

2. Problemas de trayectorias.

Sea dada una familia de curvas planas:

$$\Phi(x, y, a) = 0, \tag{1}$$

dependiente de un parámetro a.

La curva que en cada uno de sus puntos forma un ángulo constante α con la curva de la familia (1) que pasa por el mismo punto, se llama trayectoria isogonal de la familia. En particular, si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, se tiene una trayectoria ortogonal.

Suponiendo dada la familia (1) buscaremos sus trayectorias isogonales.

a) *Trayectorias ortogonales.*

Se forma la ecuación diferencial de la familia de curvas dada (véase el p. 1):

$$F(x, y, y') = 0. \tag{2}$$

La ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales tiene la forma:

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0. \tag{3}$$

La integral general de esta ecuación

$$\Phi_1(x, y, C) = 0 \tag{4}$$

proporciona la familia de trayectorias ortogonales.

Supongamos que la familia de curvas planas se da por una ecuación en coordenadas polares

$$\Phi(\rho, \varphi, a) = 0, \tag{5}$$

donde a es un parámetro. Eliminando el parámetro a entre (5) y $\frac{d\Phi}{d\varphi} = 0$, obtenemos la ecuación diferencial de la

familia (5): $F(\rho, \varphi, \rho')=0$. Sustituyendo en esta ρ' por $-\frac{\rho^2}{\rho'}$ obtenemos la ecuación diferencial de la familia de las trayectorias ortogonales:

$$F\left(\rho, \varphi, -\frac{\rho^2}{\rho'}\right)=0.$$

b) *Trayectorias isogonales.*

Supongamos que las trayectorias se cortan con las curvas de la familia dada bajo un ángulo α, donde $\operatorname{tg}\alpha=k$. Se puede demostrar que la ecuación diferencial de las trayectorias isogonales tiene la forma

$$F\left(x, y, \frac{y'-k}{1+ky'}\right)=0.$$

Ejemplo 1. Hallar la ecuación diferencial de la familia de hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{1}=1.$$

Solución. Derivando esta ecuación respecto de x, obtenemos

$$\frac{2x}{a^2}-2yy'=0, \text{ o bien, } \frac{x}{a^2}=yy'.$$

Multipliquemos ambos miembros por x; entonces

$$\frac{x^2}{a^2}=xyy'.$$

Sustituyendo en la ecuación, hallamos

$$xyy'-y^2=1.$$

Esta es la ecuación diferencial de la familia de hipérbolas.

Ejemplo 2. Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas (a es un parámetro)

$$y=a\left(1-e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Solución. Derivando respecto de x ambos miembros de la ecuación, se tiene

$$y'=e^{-\frac{x}{a}}.$$

De aquí que

$$a = -\frac{x}{\ln y'}.$$

Poniendo la expresión obtenida de a en la ecuación de la familia de las curvas, obtenemos

$$y = -\frac{x}{\ln y'}(1 - y'),$$

o bien,

$$y \ln y' + x(1 - y') = 0.$$

Esta es la ecuación diferencial buscada de la familia de curvas dada.

Ejemplo 3. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de rectas $y = kx$.

Solución. Esta consta de rectas que pasan por el origen de coordenadas.

Para hallar la ecuación diferencial de la familia dada, derivamos respecto de x ambos miembros de la ecuación $y = kx$. Resulta, $y' = k$. Eliminando el parámetro k en el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{matrix} y = kx \\ y' = k \end{matrix}\right\},$$

obtenemos la ecuación diferencial de la familia: $xy' = y$. Sustituyendo en ella y' por $-\frac{1}{y'}$, resulta la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales $-\frac{x}{y'} = y$, o bien, $yy' + x = 0$. Esta es una ecuación con variables separables; integrándola obtenemos la ecuación de las trayeciones ortogonales $x^2 + y^2 = C$ $(C \geqslant 0)$. Las trayectorias ortogonales son circunferencias con el centro en el origen de coordenadas (fig. 13).

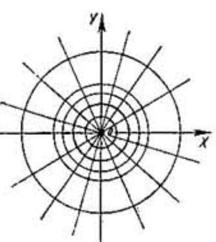


Fig. 13

Ejemplo 4. Hallar la ecuación de la familia de las curvas que son ortogonales a la familia $x^2 + y^2 = 2ax$.

Solución. La familia dada de curvas representa una familia de circunferencias cuyos centros están situados en el eje OX y son tangentes al eje OY.

Derivando respecto de x ambos miembros de la ecuación de la familia dada, hallamos:

$$x + yy' = a.$$

Fig. 14

Eliminando el parámetro a entre las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2ax \\ x + yy' = a \end{array}\right\},$$

obtenemos la ecuación diferencial de la familia dada:

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0.$$

La ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es:

$$x^2 - y^2 + 2xy\left(-\frac{1}{y'}\right) = 0, \text{ o bien, } y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Esta ecuación es homogénea. Integrándola obtenemos: $x^2 + y^2 = Cy$. Las curvas integrales son circunferencias cuyos centros están situados en el eje OY y son tangentes al eje OX (fig. 14).

Ejemplo 5. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de parábolas

$$y = ax^2.$$

Solución. Formamos la ecuación diferencial de la familia de parábolas. Para esto, derivamos respecto de x ambos miembros de la ecuación dada: $y' = 2ax$ Eliminando el parámetro a, hallamos $\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$, o bien, $y' = \frac{2y}{x}$, que representa la ecuación de la familia considerada Sustituyendo en esta ecuación y' por $-\frac{1}{y'}$, obtenemos la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales $-\frac{1}{y'} = \frac{2y}{x}$, o bien, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$. Integrándola, hallamos $y^2 = -\frac{x^2}{2} + C$, o bien, $\frac{x^2}{2} + y^2 = C$, donde $C > 0$. La

familia ortogonal buscada es una familia de elipses (fig. 15).

Ejemplo 6. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de lemniscatas

$$\rho^2 = a \cos 2\varphi.$$

Solución. Tenemos

$$\rho^2 = a \cos 2\varphi$$
$$\rho\rho' = -a \operatorname{sen} 2\varphi.$$

Eliminando el parámetro a obtenemos la ecuación diferencial de la familia de curvas dada:

$$\rho' = -\rho \operatorname{tg} 2\varphi.$$

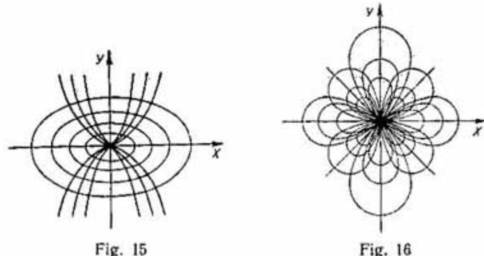


Fig. 15 Fig. 16

Sustituyendo ρ' por $-\frac{\rho^2}{\rho'}$ hallamos la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales

$$-\frac{\rho^2}{\rho'} = -\rho \operatorname{tg} 2\varphi.$$

De donde $\frac{d\rho}{\rho} = \operatorname{ctg} 2\varphi \, d\varphi$. Integrando, obtenemos la ecuación de las trayectorias ortogonales

$$\rho^2 = C \operatorname{sen} 2\varphi.$$

Las trayectorias ortogonales de la familia de lemniscatas son lemniscatas cuyos ejes de simetría forman con el eje polar un ángulo de $\pm 45^\circ$ (fig. 16).

Formar las ecuaciones diferenciales de las siguientes familias de curvas:

281. $y = \frac{a}{x}$.

282. $x^2 - y^2 = ax$.

283. $y = ae^{\frac{x}{a}}$.

284. $y = Cx - C - C^2$.

285. $y = e^x (ax + b)$.

286. $y^2 = 2Cx + C^2$.

287. $y = ax^2 + bx + C$.

288. $y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3$.

289. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$.

290. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

291. $y = a \operatorname{sen}(x + \alpha)$.

Hallar las trayectorias ortogonales para las siguientes familias de curas:

292. $y^2 + 2ax = a^2$, $a > 0$.

293. $y = ax^n$.

a es un parámetro

294. $y = ae^{\sigma x}$, $\sigma = \text{const}$.

295. $\cos y = ae^{-x}$.

296. $x^2 + \frac{1}{2} y^2 = a^2$.

297. $x^2 - y^2 = a^2$.

298. $x^k + y^k = a^k$.

299. $x^2 + y^2 = 2ay$.

300. $x^2 - \frac{1}{3} y^2 = a^2$.

301. $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

302. $y^2 = 4(x - a)$.

§ 11. SOLUCIONES SINGULARES

Una solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación diferencial

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

se llama *singular*, si en cada uno de sus puntos se infringe la propiedad de unicidad, es decir, si por cada uno de sus puntos (x_0, y_0), además de esta solución, pasa también otra solución que tiene en el punto (x_0, y_0) la misma tangente que la solución $y = \varphi(x)$, pero que no coincide con esta última en ningún entorno del punto (x_0, y_0) arbitrariamente pequeño. La gráfica de una solución singular se

llamará *curva integral singular* de la ecuación (1). Si la función $F(x, y, y')$ y sus derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial y}$ y $\frac{\partial F}{\partial y'}$ son continuas con respecto a todos los argumentos x, y, y', cualquier solución singular de la ecuación (1) satisface timbién a la ecuación:

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \tag{2}$$

Por consiguiente, para hallar las soluciones singulares de la ecuación (1) hay que eliminar y' entre las ecuaciones (1) y (2). La ecuación que resulta al eliminar y':

$$\psi(x, y) = 0, \tag{3}$$

se denomina *p-discriminante de la ecuación* (1), y la curva determinada por la ecuación (3), *curva p-discriminante* (abreviado, escribiremos: CPD).

Frecuentemente ocurre que la CPD se descompone en unas cuantas ramas. En este caso se debe averiguar si cada una de éstas por separado es solución de la ecuación (1), y en caso afirmativo se debe comprobar si es solución singular es decir, si se infringe la unicidad en cada uno de sus puntos.

Se llama *envolvente de una familia de curvas*

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{4}$$

a la curva que en cada uno de sus puntos es tangente a una de las curvas de la familia (4), siendo cada segmento de la misma tangente a una infinidad de curvas de la familia (4). *)

Si (4) es la integral general de la ecuación (1), la envolvente de la familia de curvas (4), en caso de que exista, será una curva integral singular de esta ecuación.

En efecto, en los puntos de la envolvente los valores x, y, y' coinciden con los valores correspondientes de la curva integral que es tangente a la envolvente en el punto (x, y); por consiguiente, en cada punto de la envolvente los valores x, y, y' satisfacen a la ecuación $F(x, y, y') = 0$, es decir, la envolvente es una curva integral.

---

*) Se dice que las curvas Γ_1 y Γ_2 son tangentes en un punto M_0, si éstas tienen en este punto una tangente común.

Por otra parte, en cada punto de la envolvente se infringe la unicidad, puesto que por cada punto de la misma pasan al menos dos curvas integrales en una misma dirección: la envolvente y la curva integral de la familia (4) que es tangente a ésta en el punto considerado. En consecuencia, la envolvente es una curva integral singular.

Por el curso de análisis matemático se sabe que la envolvente forma parte de la curva C-discriminante (abreviadamente CCD) determinada por el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x, y, C) &= 0 \\ \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Una rama de la CCD es envolvente cuando en ella se cumplen las condiciones siguientes:

1) Las derivadas parciales $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ y $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ existen y sus módulos están acotados:

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right| \leqslant N, \tag{6}$$

donde M y N son constantes;

2) $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \neq 0$, o sino $\frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0$. $\quad (7)$

Observación 1. Las condiciones 1) y 2) solamente son suficientes, por lo cual, pueden ser envolventes también las ramas de la CCD en las que no se cumple alguna de estas condiciones.

Observación 2. En el caso general, el p-discriminante contiene:

1. A la envolvente (E).

2. Al lugar geométrico de los puntos de contacto al cuadrado (C^2).

3. Al lugar geométrico de los puntos cuspidales (o de retroceso) (R):

$$\Delta_p = E \cdot C^2 \cdot R. \tag{8}$$

El C-discriminante contiene:

1. A la envolvente (E).

2. Al lugar geométrico de los puntos anocdales al cuadrado (A^2).

3. Al lugar geométrico de los puntos cuspidales (o de retroceso) al cubo (R^3):

$$\Delta_C = E \cdot A^2 \cdot R^3. \qquad (9)$$

Entre todos los lugares geométricos solamente la envolvente es solución (singular) de la ecuación diferencial. Esta figura tanto en la curva p-discriminante como en la curva C-discriminante a la primera potencia, circunstancia que facilita la averiguación de la solución singular.

Ejemplo 1. Hallar las soluciones singulares de la ecuación diferencial

$$2y(y'+2) - xy'^2 = 0. \qquad (1)$$

Solución. La solución singular, si ésta existe, se determina por el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2y(y'+2) - xy'^2 = 0 \\ 2y - 2xy' = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

donde la segunda ecuación (2) se ha obtenido de la (1) derivando con respecto a y'. Eliminando y' se obtiene la curva p-discriminante

$$y^2 + 4xy = 0, \qquad (3)$$

que se descompone en dos ramas:

$$y = 0 \qquad (3a)$$

y

$$y = -4x. \qquad (3b)$$

Reemplazando nos convencemos de que estas functiones son soluciones de la ecuación (1).

Para determinar si las soluciones (3a) y (3b) son singulares o no, hallamos la envolvente de la familia

$$Cy - (C - x^2) = 0, \qquad (4)$$

que representa la integral general de la ecuación (1).

He aquí el sistema para la determinación de la curva C-discriminante

$$\left.\begin{aligned} Cy - (C-x)^2 = 0 \\ y - 2(C-x) = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (5)$$

Eliminando C entre estas ecuaciones, obtenemos:

$$y^2 + 4xy = 0$$

o bien, $y = 0$ e $y = -4x$, lo cual coincide con (3a) y (3b). Como en las líneas (3a) y (3b) se cumplen las condiciones (6) y (7), hacemos la conclusión de que las líneas $y = 0$ e $y = -4x$ son envolventes y, por lo tanto, (3a) y (3b) son soluciones singulares de la ecuación dada.

Las curvas integrales (4) son parábolas $y = \frac{(C-x)^2}{C}$, mientras que las líneas $y = 0$, $y = -4x$ son las envolventes de esta familia (fig. 17).

Ejemplo 2.

$$y'^2 = 4x^2. \tag{1}$$

Derivando (1) con respecto a y', resulta:

$$2y' = 0. \tag{2}$$

Eliminando y' entre (1) y (2), obtenemos:

$$x^2 = 0. \tag{3}$$

El eje de ordenadas es la curva discriminante. Esta no es una curva integral de la ecuación (1), pero según el es-

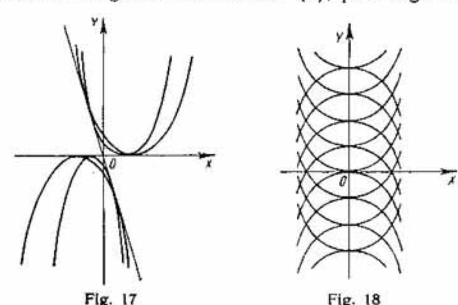


Fig. 17 Fig. 18

quema (8), puede representar el lugar geométrico de los puntos de contacto de las curvas integrales.

Las soluciones de la ecuación (1) son las parábolas

$$y = x^2 + C, \quad y = -x^2 + C \tag{4}$$

y las curvas diferenciables que se pueden formar con sus partes (fig. 18.)

En la fig. 18 se observa que la recta $x = 0$ verdaderamente es el lugar geométrico de los puntos de contacto de las curvas integrales de la ecuación (1).

Ejemplo 3.

$$y'^2(2-3y)^2 = 4(1-y). \quad (1)$$

Hallemos la CPD eliminando y' entre el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} y'^2(2-3y)^2 - 4(1-y) = 0 \\ 2y'(2-3y)^2 = 0 \end{array}\right\}. \quad (2)$$

Resulta:

$$(2-3y)^2(1-y) = 0. \quad (3)$$

Transformamos (1) a la forma

$$\frac{dx}{dy} = \pm\frac{2-3y}{2\sqrt{1-y}}.$$

y hallamos la integral general

$$y^2(1-y) = (x-C)^2. \quad (4)$$

Eliminando C entre las ecuaciones del sistema

$$\left.\begin{array}{r} y^2(1-y) - (x-C)^2 = 0 \\ 2(x-C) = 0 \end{array}\right\} \quad (5)$$

hallamos la CCD:

$$y^2(1-y) = 0. \quad (6)$$

Así, pues, de (3) y (6) obtenemos:

$$\Delta_p = (1-y)(2-3y)^2,$$
$$\Delta_c = (1-y)\,y^2.$$

El factor $1-y$ está elevado en el p-discriminante y en el C-discriminante a la primera potencia y representa la envolvente. Por lo tanto, la función $y = 1$ es una solución singular de la ecuación diferencial (1). Sustituyendo directamente nos convencemos de que $y = 1$ satisface a la ecuación.

La ecuación $2-3y=0$, que está elevada a la segunda potencia en el p-discriminante y que no figura en el C-discriminante, representa el lugar geométrico de los puntos de contacto (C^2).

Finalmente, la ecuación $y = 0$, que está elevada a la segunda potencia en el C-discriminante y que no figura en el p-discriminante, representa el lugar geométrico de los puntos anocdales (A^2) (fig. 19).

Ejemplo 4. Dada la familia de curvas integrales

$$y^2 - (x + C)^3 = 0 \qquad (1)$$

de una ecuación diferencial de primer orden, hallar una solución singular de la misma.

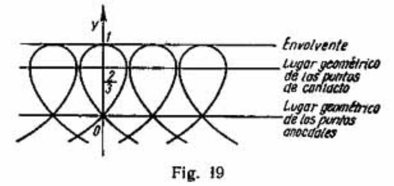


Fig. 19

S o l u c i ó n. Hallamos la curva C-discriminante:

$$\left.\begin{array}{r} y^2 - (x + C)^3 + 0 \\ -3(x + C)^2 = 0 \end{array}\right\}. \qquad (2)$$

Eliminando aquí C, resulta,

$$y = 0. \qquad (3)$$

Como en la recta $y = 0$ no se cumple la condición (7), pues, en virtud de la ecuación (2),

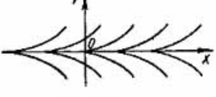


Fig. 20

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -3(x + C)^2 = 0,$$

y en virtud de la ecuación (3),

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y = 0,$$

la recta $y = 0$ es el lugar geométrico de los puntos múltiples de la familia (1) o con más precisión, de los puntos de retroceso (véase la fig. 20).

Pero, a la vez, este lugar geométrico de puntos $y = 0$ es también la envolvente de la familia (1), pues, en cualquier punto $(-C, 0)$, tanto para la recta $y = 0$ como

para la parábola semicúbica $y=(x+C)^{\frac{3}{2}}$, se cumple la igualdad de sus coeficientes angulares $y'|_{x=-C}=0$.

Por consiguiente, la función $y=0$ es una solución singular de la ecuación diferencial $y=\frac{8}{27}y'^3$, para la cual, la familia (1) es la integral general.

Ejemplo 5. Hallar la solución singular, partiendo de la ecuación diferencial

$$xy'^2-2yy'+4x=0 \tag{1}$$

y de su integral general

$$x^2=2C(y-2C). \tag{2}$$

Solución. Eliminemos C entre las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} 2C(y-2C)-x^2=0 \\ 2(y-2C)-4C=0 \end{array}\right\}. \tag{3}$$

Obtenemos:

$$y^2-4x^2=0,$$

o bien,

$$y=\pm 2x. \tag{4}$$

Ambas rectas (4) son líneas integrales de la ecuación (1), por lo cual las funciones $y=2x$ e $y=-2x$ son soluciones singulares de la ecuación (1).

En los siguientes ejercicios hay que hallar las soluciones singulares, si éstas existen:

303. $(1+y'^2)y^2-4yy'-4x=0$.

304. $y'^2-4y=0$.

305. $y'^3-4xyy'+8y^2=0$.

306. $y'^2-y^2=0$.

307. $y'=\sqrt[3]{y^2}+a$ ¿Para qué valores del parámetro a tiene esta ecuación solucion singular?

308. $(xy'+y)^2+3x^5(xy'-2y)=0$.

309. $y(y-2xy')^2=2y'$.

310. $8y'^3-12y'^2=27(y-x)$.

311. $(y'-1)^2=y^2$.

Mediante el C-discriminante, hallar las soluciones singulares de las ecuaciones diferenciales de primer orden, sabiendo sus integrales generales.

312. $y = xy' + y'^2$; $y = Cx + C^2$.

313. $(xy' + y)^2 = y^2 y'$; $y(C - x) = C^2$.

314. $y^2 y'^2 + y^2 = 1$; $(x - C)^2 + y^2 = 1$.

315. $y'^2 - yy' + e^x = 0$; $y = Ce^x + \frac{1}{C}$.

316. $3xy'^2 - 6yy' + x + 2y = 0$; $x^2 + C(x - 3y) + C^2 = 0$.

317. $y = xy' + \sqrt{a^2 y'^2 + b^2}$; $y = Cx \sqrt{a^2C^2 + b^2}$.

§ 12. DIVERSOS PROBLEMAS

Integrar las siguientes ecuaciones:

318. $(y - y^3)\,dx + (2xy^2 - x - ay^2)\,dy = 0$.

319. $y' = (x - y)^2 + 1$.

320. $x \operatorname{sen} x \cdot y' + (\operatorname{sen} x - x \cos x)\, y = \operatorname{sen} x \cos x - x$

321. $\frac{dy}{dx} + y \cos x = y^n \operatorname{sen} 2x \quad n \neq 1$.

322. $(x^3 - 3xy^2)\,dx + (y^3 - 3x^2 y)\,dy = 0$.

323. $(5xy - 4y^2 - 6x^2)\,dx + (y^2 - 8xy + 2{,}5x^2)\,dy = 0$.

324. $(3xy^2 - x^2)\,dx + (3x^2 y - 6y^2 - 1)\,dy = 0$.

325. $(y - xy^2 \ln x)\,dx + x\,dy = 0$, $\mu = \varphi(x \cdot y)$.

326. $(2xye^{x^2} - x \operatorname{sen} x)\,dx + e^{x^2}\,dy = 0$.

327. $2y' + y^2 + \frac{1}{x^2} = 0$.

328. $y' = \frac{1}{2x - y^2}$.

329. $x^2 + xy' = 3x + y'$.

330. $4x^3y^2\,dx + (x^4 - 2x^4y - 1)\,dy = 0.$

331. $xy\,y' - y^2 = x^4.$

332. $\dfrac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{dy}{2y^2 - xy}.$

333. $(2x - 1)\,y' - 2y = \dfrac{1 - 4x}{x^2}.$

334. $(x - y + 3)\,dx + (3x + y + 1)\,dy = 0.$

335. $y' + \cos\dfrac{x + y}{2} = \cos\dfrac{x - y}{2}.$

336. $y'(3x^2 - 2x) - y(6x - 2) + \dfrac{2}{x}(9x - 4) = 0.$

337. $xy^2y' - y^3 = \dfrac{1}{3}x^4.$

338. $y' = \mathrm{tg}^2(ax + by + c), \quad b \neq a, \quad ab > 0.$

339. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0, \quad y\,|_{x=1} = 1.$

340. $(x^2 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0.$

341. $(x - y + 2)\,dx + (x - y + 3)\,dy = 0.$

342. $(xy^2 + y)\,dx - x\,dy = 0.$

343. $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2y\,dy = 0.$

344. $(x - 1)(y^2 - y + 1)\,dx = (y + 1)(x^2 + x + 1)\,dy.$

345. $(x - 2xy - y^2)\,y' + y^2 = 0.$

346. $y\cos x\,dx + (2y - \mathrm{sen}\,x)\,dy = 0.$

347. $y' - 1 = e^{x+2y}.$

348. $2(x^5 + 2x^3y - y^2x)\,dx + (y^2 + 2x^2y - x^4)\,dy = 0.$

349. $x^2y^ny' = 2xy' - y, \quad n \neq -2$

350. $(\sqrt{1 + x^2} + ny)\,dx + (\sqrt{1 + y^2} + nx)\,dy = 0,$
$y\,|_{x=0} = n.$

351. $[3(x + y) + a^2]\,y' = 4(x + y) + b^2.$

352. $ax\,yy'^2 + (x^2 - ay^2 - b)\,y' - xy = 0,$
(la sustitución $x^2 = s, \quad y^2 = t$).

353. $(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0.$

§ 13. ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR. REDUCCION DEL ORDEN DE LA ECUACION

Las ecuaciones diferenciales de n-ésimo orden tienen la forma

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0. \qquad (1)$$

o, despejando $y^{(n)}$,

$$y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (2)$$

Subsiste el siguiente teorema de existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial (2).

Teorema. Si en la ecuación (2) la función $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$, cumple las siguientes condiciones:

a) es continua respecto de sus argumentos $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, en un recinto D de variación de los mismos,

b) tiene derivadas parciales continuas $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$, $\frac{\partial f}{\partial y''}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ con respecto a los argumentos $y, y', y'', \ldots$ $\ldots, y^{(n-1)}$ en el recinto D, entonces, existe y es única la solución $y=\varphi(x)$ de la ecuación (2) que verifique las condiciones

$$y\,|_{x=x_0}=y_0, \quad y'|_{x=x_0}=y'_0, \ \ldots, \quad y^{(n-1)}\,|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}, \qquad (3)$$

donde los valores $x=x_0, y=y_0, y'=y'_0, \ldots, y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$ están comprendidos en el recinto D.

Las condiciones (3) se llaman condiciones iniciales.

El problema que tiene por objeto hallar la solución $y=\varphi(x)$ de la ecuación (2) que cumple las condiciones iniciales (3) se denomina problema de Cauchy.

Para las ecuaciones de segundo orden $y''=f(x, y, y')$, las condiciones iniciales son de la forma

$$y\,|_{x=x_0}=y_0, \quad y'\,|_{x=x_0}=y'_0,$$

donde x_0, y_0, y'_0 son unos números dados. En este caso, el teorema de existencia y unicidad tiene el sigulente significado geométrico: Por el punto dado $M_0(x_0, y_0)$ del plano XOY pasa una sola curva integral que tiene una pendiente dada y'_0.

Se llama solución general de una ecuación diferencial (2) de orden n, el conjunto de todas sus soluciones determinadas por la fórmula $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, que contiene n constantes arbitrarias $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tales que, dadas las condiciones iniciales (3), existen unos valores $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_n$ de modo que $y = \varphi(x, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_n)$ sea la solución de la ecuación (2) que cumple las condiciones iniciales.

Cualquier solución, obtenida de la solución general para valores asignados de las constantes arbitrarias $C_1, C_2, \ldots, C_n$, se llama solución particular de la ecuación diferencial.

Una relación de la forma

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

que determina en forma implicita la solución general de la ecuación diferencial se llama *integral general de la misma.*

Asignando a las constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ unos valores numéricos admisibles concretos, obtenemos una integral particular de la ecuación diferencial.

La gráfica de una solución particular o de una integral particular se llama *curva integral* de la ecuación diferencial considerada.

Ejemplo. Demostrar que $y = C_1x + C_2$ es la solución general de la ecuación diferencial $y'' = 0$.

S o l u c i ó n. Demostremos que $y = C_1x + C_2$ satisface a la ecuación dada. En efecto, tenemos $y' = C_1$, $y'' = 0$.

Supongamos ahora que se dan unas condiciones iniciales arbitrarias $y\,|_{x=x_0} = y_0$, $y'\,|_{x=x_0} = y'_0$. Demostremos que las constantes C_1 y C_2 se pueden elegir de modo que $y = C_1x + C_2$ cumpla estas condiciones. Se tiene

$$y = C_1x + C_2, \quad y' = C_1.$$

Poniendo $x = x_0$, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = C_1x_0 + C_2 \\ y'_0 = C_1 \end{array}\right\},$$

del que univocamente se determinan $C_1 = y'_0$ y $C_2 = y_0 - x_0 y'_0$. Por lo tanto, la solución $y = y'_0(x - x_0) + y_0$ cumple las condiciones iniciales asignadas. Geométricamente, esto significa que por cada punto $M_0(x_0, y_0)$ del plano XOY pasa una sola recta que tiene una pendiente dada.

Evidentemente, una sola condición inicial, por ejemplo, $y|_{x=x_0} = y_0$, determina un haz de rectas con centro en el punto $M_0(x_0, y_0)$, es decir, una sola condición inicial no es suficiente para garantizar la existencia de solución única.

Demostrar en los siguientes ejercicios que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones indicadas:

354. $y = e^{-x}(3\cos x - 2\operatorname{sen} x), \quad y'' + 2y' + 2y = 0.$

355. $y = e^{2x}(C_1\cos 2x + C_2\operatorname{sen} 2x), \quad y'' - 4y' + 8y = 0.$

356. $y = x(\operatorname{sen} x - \cos x), \quad y'' + y = 2(\cos x + \operatorname{sen} x).$

357. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}, \quad y'' + 6y' + 9y = 0.$

358. $y = x^2 \ln x, \quad xy''' = 2.$

359. $x = y^2 + y, \quad y'y''' = 3y''^2.$

360. $x + C = e^{-y}, \quad y'' = y'^2.$

361. $x = y + \ln y, \quad yy'' + y'^3 - y'^2 = 0.$

362. $y = C_1 + C_2 \int\limits_1^x \frac{e^t}{t}\,dt, \qquad xy'' + (1 - x)y' = 0.$

363. $y = C_1 x + C_2 x \int\limits_x^2 \frac{e^t}{t}\,dt \quad (x > 0),$

$x^2 y'' - (x^2 + x)y' + (x + 1)y = 0.$

364. $y = C_1 \ln x + C_2 \ln x \int\limits_x^e \frac{dt}{\ln t} \quad (x > 1),$

$x^2 \ln^2 x \cdot y'' - x\ln x \cdot y' + (\ln x + 1)y = 0.$

365. $\left.\begin{array}{l} x = t(2\ln t - 1) + C_1 \\ y = t^2 \ln t + C_2 \end{array}\right\}, \qquad y''(1 + 2\ln y') = 1.$

366. $\left.\begin{array}{l} x = (t + 1)e^t + C_1 \\ y = t^2 e^t + C_2 \end{array}\right\}, \qquad y'' e^{y'}(y' + 2) = 1.$

367. $\left.\begin{aligned} x &= C_2 + C_1\left(t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) \\ y &= 1 - C_1 \operatorname{sen}^2 t \end{aligned}\right\}, \quad 2(1-y)y'' = 1 + y'^2.$

368. $\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\ln t + \frac{3}{4t^2} \\ y &= \frac{1}{4}t + \frac{3}{4t^3} \end{aligned}\right\}, \quad y''^2 - 2y'y'' + 3 = 0.$

Verificar que las funciones dadas son las soluciones generales de las ecuaciones correspondientes:

369. $y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x, \qquad y'' + y = 0.$

370. $y = \frac{1}{x}(C_1 e^x + C_2 e^{-x}), \qquad xy'' + 2y' - xy = 0.$

371. $y = C_1 x + C_2 \ln x, \quad x^2(1 - \ln x)\, y'' + xy' - y = 0.$

372. $y = \sqrt{(x + C_1)^2 + C_2}, \qquad yy'' + y'^2 = 1.$

373. $x + C_2 = y^3 + C_1 y, \qquad y'' + 6yy'^3 = 0.$

374. $x + C_2 = \ln \operatorname{sen}(y + C_1), \qquad y'' = y'(1 + y'^2).$

375. $y = C_1 x + C_2 x \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt,$

$x \operatorname{sen} x \cdot y'' - x \cos x \cdot y' + \cos x \cdot y = 0.$

Verificar que las relaciones dadas son integrales (generales o particulares) de las ecuaciones indicadas:

376. $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1, \quad y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}.$

377. $y^2 = 1 + (1 - x)^2, \quad y^3 y'' = 1.$

378. $\operatorname{sen}(y - C_2) = e^{x - C_1}, \quad y'' = y'(1 + y'^2).$

379. $C_1 x + C_2 = \ln(C_1 y - 1), \quad yy'' = y'^2 + y'.$

380. $y \ln y = x + \int_0^x e^{t^2}\, dt, \quad y(1 + \ln y)\, y'' + y'^2 = 2xye^{x^2}.$

REDUCCION DEL ORDEN DE LA ECUACION

Señalemos otros tipos de ecuaciones diferenciales que permiten reducir el orden.

1. $y^{(n)} = f(x).$

Después de integrar n veces obtenemos la solución general

$$y = \underbrace{\int \dots \int}_{n} f(x) \underbrace{dx \dots dx}_{n} + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots$$
$$\dots + C_{n-1}x + C_n.$$

II. La ecuación no contiene la función incógnita y sus derivadas hasta el orden $k-1$ inclusive:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Se puede disminuir el orden de la ecuación haciendo la sustitución $y^{(k)}(x) = p(x)$, después de lo cual la ecuación toma la forma

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0.$$

De esta ecuación determinamos $p = f(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$, siempre que esto sea posible, y hallamos después y de la ecuación $y^{(k)} = f(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$ integrándola k veces.

III. La ecuación no contiene la variable independiente

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

La sustitución $y' = p$ permite reducir el orden de la ecuación en una unidad. En este caso se considera p como una nueva función incógnita de y: $p = p(y)$. Expresamos todas las derivadas $y', y'', \dots, y^{(n)}$ mediante las derivadas con respecto a y de la nueva función incógnita p:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p,$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2, \text{ etc.}$$

Poniendo estas expresiones en la ecuación en lugar de $y', y'', \dots, y^{(n)}$, resulta una ecuación diferencial de orden $n-1$.

IV. La ecuación

$$F(x, y, y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

es homogénea respecto de los argumentos $y, y', y'', \ldots$ $\ldots, y^{(n)}$, o sea,

$$F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$$

Se puede disminuir el orden de esta ecuación haciendo la sustitución

$$y = e^{\int z\,dx},$$

donde z es una nueva función incógnita de x: $z = z(x)$.

V. La ecuación es tal, que al escribirla mediante diferenciales

$$F(x, y, dx, dy, d^2y, \ldots, d^n y) = 0,$$

resulta que F es homogénea respecto de sus argumentos $x, y\ dx, dy, d^2y, \ldots, d^n y$, donde se supone que x y dx son de primer grado e y, dy, d^2y, etc., de grado m. En estas condiciones, $\frac{dy}{dx}$ será de grado $m-1$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ de grado $m-2$, etc.

Para reducir el orden de la ecuación se hace la sustitución

$$x = e^t, \quad y = ue^{mt}.$$

Como resultado obtenemos una ecuación diferencial entre u y t que no contiene a t explícitamente, la cual permite reducir su orden en una unidad (caso III).

Al resolver el problema de Cauchy para las ecuaciones de orden superior es conveniente determinar los valores de las constantes C_i durante el mismo proceso de resolución y no después de haber hallado la integral general de la ecuación. De este modo, resulta más rápida la resolución del problema, pudiendo ocurrir también que se simplifique considerablemente la integración, puesto que las constantes C_i tienen ya valores numéricos concretos. Cuando las constantes C_i son arbitrarias, la integración resulta más difícil y a veces suele ser imposible expresar la integral por funciones elementales.

Como ejemplo, veamos el siguiente problema de Cauchy

$$y'' = 2y^3, \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 1.$$

Poniendo $y' = p$, obtenemos

$p\frac{dp}{dy} = 2y^3$, de donde $p^2 = y^4 + C_1$, o bien $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^4 + C_1}$.

Separando las variables, hallamos

$$x + C_2 = \int (y^4 + C_1)^{-\frac{1}{2}} dy.$$

En el segundo miembro de la última iguidad resulta una integral de una diferencial binomia. En este caso, $m = 0$, $n = 4$, $p = -\frac{1}{2}$, o sea, es un caso no integrable.

Por consiguiente, esta integral no se expresa en forma de combinación finita de funciones elementales. No obstante, empleando las condiciones iniciales, resulta $C_1 = 0$. Por lo tanto, $\frac{dy}{dx} = y^2$, de donde, teniendo en cuenta las condiciones iniciales, hallamos finalmente $y = \frac{1}{1-x}$.

He aquí unos cuantos ejemplos de casos distintos de reducción del orden de la ecuación diferencial.

Ejemplo 1. Hallar la solución general de la ecuación

$$y''' = \operatorname{sen} x + \cos x.$$

Solución. Integrando sucesivamente la ecuación dada, resulta

$$y'' = -\cos x + \operatorname{sen} x + C_1,$$
$$y' = -\operatorname{sen} x - \cos x + C_1 x + C_2,$$
$$y = \cos x - \operatorname{sen} x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Ejemplo 2. Hallar la solución general de la ecuación

$$y''' = \frac{\ln x}{x^2}$$

y señalar la solución que cumple las condiciones iniciales

$$y|_{x=1} = 0, \quad y'|_{x=1} = 1, \quad y''|_{x=1} = 2.$$

Solución. Integrando esta ecuación sucesivamente tres veces, hallamos

$$y'' = \int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_1,$$
$$y' = -\frac{1}{2} \ln^2 x - \ln x + C_1 x + C_2, \qquad (1)$$
$$y = -\frac{x}{2} \ln^2 x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Busquemos la solución que cumple las condiciones iniciales dadas. Poniendo en (1) los datos iniciales, obtenemos

$$\left.\begin{aligned} \frac{C_1}{2}+C_2+C_3&=0\\ C_1+C_2&=1\\ -1+C_1&=2 \end{aligned}\right\}$$

De donde $C_1=3$, $C_2=-2$, $C_3=\frac{1}{2}$ La solución buscada es

$$y=-\frac{x}{2}\ln^2 x+\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}.$$

Ejemplo 3. Resolver la ecuación

$$y'''=\sqrt{1+(y'')^2}.$$

Solución. La ecuación no contiene la función incognita y y su derivada, por lo cual, hacemos $y''=p$. La ecuación toma ahora la forma

$$\frac{dp}{dx}=\sqrt{1+p^2}.$$

Separando las variables e integrando, obtenemos

$$p=\frac{e^{x+C_1}-e^{-(x+C_1)}}{2}.$$

Sustituyendo p por y'' resulta

$$y''=\frac{e^{x+C_1}-e^{-(x+C_1)}}{2}.$$

Integrando sucesivamente, se tiene

$$y'=\frac{e^{x+C_1}+e^{-(x+C_1)}}{2}+C_2,\quad y=\frac{e^{x+C_1}-e^{-(x+C_1)}}{2}+C_2x+C_3$$

o bien

$$y=\operatorname{sh}(x+C_1)+C_2x+C_3.$$

Ejemplo 4. Resolver la ecuación

$$xy^{\mathrm{V}}-y^{\mathrm{IV}}=0.$$

Solución. La ecuación no contiene la función incógnita y sus derivadas hasta el tercer orden inclusive. Por esto, haciendo $y^{\mathrm{IV}}=p$, resulta

$$x\frac{dp}{dx}-p=0.$$

De donde

$$p=C_1x, \quad y^{IV}=C_1x.$$

Integrando sucesivamente, hallamos

$$y'''=C_1\frac{x^2}{2}+C_2,$$

$$y''=C_1\frac{x^3}{6}+C_2x+C_3,$$

$$y'=C_1\frac{x^4}{24}+C_2\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4,$$

$$y=C_1\frac{x^5}{120}+C_2\frac{x^3}{6}+C_3\frac{x^2}{2}+C_4x+C_5$$

o bien

$$y=\overline{C}_1x^5+\overline{C}_2x^3+\overline{C}_3x^2+C_4x+C_5,$$

donde

$$\overline{C}_1=\frac{C_1}{120}, \quad \overline{C}_2=\frac{C_2}{6}, \quad \overline{C}_3=\frac{C_3}{2}.$$

Ejemplo 5. Resolver la ecuación

$$y''+y'^2=2e^{-y}.$$

Solución. La ecuación no contiene la variable independiente x. Haciendo $y'=p$, $y''=p\frac{dp}{dy}$, obtenemos la ecuación de Bernoulli

$$p\frac{dp}{dy}+p^2=2e^{-y}.$$

Con la sustitución $p^2=z$, ésta se reduce a la ecuación lineal

$$\frac{dz}{dy}+2z=4e^{-y},$$

cuya solución general es

$$z=4e^{-y}+C_1e^{-2y}.$$

Sustituyendo z por $p^2=y'^2$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{4e^{-y}+C_1e^{-2y}}.$$

Separando las variables e integrando, resulta

$$x+C_2=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4e^{y}-C_1}.$$

De aqui que

$$e^y + \tilde{C}_1 = (x + C_2)^2,$$

donde

$$\tilde{C}_1 = \frac{C_1}{4}.$$

Esta es la integral de la ecuación dada.

Ejemplo 6. Resolver la ecuación

$$x^2yy'' = (y - xy')^2.$$

Solución. La ecuación es homogénea respecto de y, y', y''. Con la sustitución $y = e^{\int z\,dx}$, donde z es una nueva función incógnita de x, el orden de la ecuación se disminuye en una unidad. Se tiene,

$$y' = ze^{\int z\,dx}, \quad y'' = (z' + z^2)\,e^{\int z\,dx}.$$

Poniendo en la ecuación las expresiones de y, y', y'', resulta

$$x^2(z' + z^2)\,e^{2\int z\,dx} = \left(e^{\int z\,dx} - xze^{\int z\,dx}\right)^2.$$

Simplificamos por $e^{2\int z\,dx}$:

$$x^2(z' + z^2) = (1 - xz)^2, \text{ o bien, } x^2z' + 2xz = 1.$$

Esta ecuación es lineal. Su primer miembro se puede escribir en la forma

$$(x^2z)' = 1.$$

De donde

$$x^2z = x + C_1,$$

o bien,

$$z = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}.$$

Hallamos la integral

$$\int z\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}\right) dx = \ln|x| - \frac{C_1}{x} + \ln C_2.$$

La solución general de la ecuación dada es

$$y = e^{\ln|x| + \frac{C_1}{x} \ln C_2}, \text{ o bien, } y = C_2xe^{-\frac{C_1}{x}}.$$

Además, la ecuación tiene la solución trivial $y = 0$.

Ejemplo 7. Resolver la ecuación

$$x^3y'' = (y - xy')^2.$$

Solución. Demostremos que esta ecuación es homogénea generalizada. Suponiendo que x, y, y', y'' son de grado 1°, m-ésimo, $(m-1)$-ésimo y $(m-2)$-ésimo, respectivamente, e igualando los grados de todos los términos, obtenemos

$$3+(m-2)=2m, \qquad (*)$$

de donde $m=1$. La resolubilidad de la ecuación (*) es la condición de la homogeneidad generalizada de la ecuación.

Hagamos la sustitución

$$x=e^t, \quad y=ue^t.$$

Como

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\left(\frac{du}{dt}+u\right)e^t}{e^t}=\frac{du}{dt}+u,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du}{dt}}{e^t}=e^{-t}\left(\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du}{dt}\right).$$

después de simplificar por el factor e^{2t} la ecuación dada toma la forma

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du}{dt}=\left(\frac{du}{dt}\right)^2.$$

Poniendo $\frac{du}{dt}=p$, $\frac{d^2u}{dt^2}=p\frac{dp}{du}$, obtenemos

$$p\frac{dp}{du}+p=p^2.$$

De donde $p=0$, o bien, $\frac{dp}{du}+1=p$.
Integrando la segunda ecuación, resulta

$$p=1+C_1e^u, \text{ o bien, } \frac{du}{dt}=1+C_1e^u.$$

La solución general de esta ecuación es

$$u=\ln\frac{e^t}{C_1e^t+C_2}.$$

Volviendo a las variables x e y, obtenemos la solución general de la ecuación dada

$$y = x \ln \frac{x}{C_1 x + C_2}.$$

Nota. El caso $p = 0$ nos da $u = C$, o bien, $y = Cx$, solución particular que resulta de la solución general para

$$C_1 = e^{-C}, \quad C_2 = 0.$$

Integrar las ecuaciones:

381. $y''' = xe^x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

382. $y^{IV} = x$.

383. $y''' = x \ln x$, $y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$.

384. $y''' = x + \cos x$.

385. $y''' = \frac{x}{(x+2)^5}$, $y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$.

386. $y''^2 - 5y' + 6 = 0$.

387. $(1 + x^2) y'' + y'^2 + 1 = 0$.

388. $y''^2 - 2y''y' + 3 = 0$.

389. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

390. $y''^2 + y'^2 = y'^4$.

391. $y''^2 + y'''^2 = 1$.

392. $y''(1 + 2\ln y') = 1$.

393. $x = y''^2 + 1$.

394. $4y' + y''^2 = 4xy''$.

395. $y''^2 - y'y''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2$.

396. $y''(y' + 2) e^{y'} = 1$.

397. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$.

398. $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$.

399. $y'' = y' \ln y'$; $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$.

400. $2y'' \ln y' = y'$; $y|_{x=1} = -6e^{-2}$, $y'|_{x=1} = e^{-2}$.

401. $y'' + y'\sqrt{y'^2 - 1} = 0$; $y|_{x=\pi} = 0$, $y'|_{x=\pi} = -1$.

402. $2y'y'' = 1 + y'^2$; $y|_{x=0} = \ln 2 - 1$, $y'|_{x=0} = -1$.

403. $xy''' + y'' - x - 1 = 0$.

404. $y'y''' - 3y''^2 = 0$.

405. $xy'^2y'' = y'^3 + \frac{1}{3}x^4$.

406. $x^4y''' + 2x^3y'' = 1$.

407. $\sqrt{1-x^2}\,y'' + \sqrt{1-y'^2} = 0$.

408. $(x-1)\,y''' + 2y'' = \frac{x+1}{2x^2}$.

409. $y''y^3 = 1$.

410. $yy'' - y'^2 - 1 = 0$.

411. $3y'y'' = 2y$; $y(0) = y'(0) = 1$.

412. $y'' = ae^y$.

413. $4y'' = \frac{1}{4\sqrt{y}}$.

414. $3y'' = y^{-\frac{5}{3}}$.

415. $1 + y'^2 = 2yy''$.

416. $y^3y'' = -1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

417. $y''' = 3yy'$; $y(0) = y'(0) = 1$, $y''(0) = \frac{2}{3}$.

418. $yy'' - y'^2 = y^2y'$.

419. $yy'' = y'^2$.

420. $y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

421. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.

422. $y'' = 1 + y'^2$.

423. $xy'(yy'' - y'^2) - yy'^2 = x^4y^3$.

424. $x^4y'' = (y - xy')^3$, $y(1) = y'(1) = 1$.

425. $y'' + y'^2 + 2y' = 0$; $y|_{x=0} = \ln 2$, $y'|_{x=0} = -1$.

426. $y'' = y'(1 + y'^2)$.

427. $3y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$.

428. $y''(1 + 2\ln y') = 1$; $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$.

429. $y''(y'+2)e^{y'}=1;\ y|_{x=0}=e^{-1},\ y'|_{x=0}=-1.$

430. $y^2y'''-3yy'y''+2y'^3+\frac{y}{x}(yy''-y'^2)=\frac{y^3}{x^2}.$

431. Hallar el tiempo que necesita un cuerpo para caer a la Tierra desde la altura de 400 000 km (aproximadamente, ésta es la distancia desde la Luna hasta el centro de la Tierra), si la altura se mide desde el centro de la Tierra y el radio de la misma es 6 400 km, aproximadamente.

432. Hallar la ley del movimiento de un punto material de masa m que se mueve por una recta OA debido a la acción de una fuerza repulsiva que es inversamiente proporcional al cubo de la distancia del punto $x = OM$ hasta el centro inmóvil O.

433. Un cuerpo de masa m cae desde una altura con la velocidad v. Durante la caída, el cuerpo experimenta una resistencia que es proporcional al cuadrado de la velocidad. Hallar la ley del movimiento del cuerpo.

434. Hallar una curva que pase por el origen de coordenadas, de modo que el área del triángulo formado por la tangente a la curva en uno de sus puntos, la ordenada del mismo punto y el eje OX, sea proporcional al área del trapecio mixtilíneo formado por la curva, el eje OX y la ordenada de este punto.

435. Hallar la curva cuyo radio de curvatura es constante.

§ 14. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN n

1. INDEPENDENCIA LINEAL DE LAS FUNCIONES. DETERMINANTE DE WRONSKY (WRONSKIANO)

Sea dado un sistema finito de n funciones $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$, definidas en el intervalo (a, b). Se dice que éstas son linealmente dependientes en el intervalo (a, b), si existen unas constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, no simul-

táneamente iguales a cero, tales que para todos los valores de x de este intervalo se cumple la identidad:

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0.$$

Si esta identidad se cumple solamente para $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \ldots = \alpha_n = 0$, se dice que las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ son linealmente independientes en el intervalo (a, b).

Ejemplo 1. El sistema de funciones $1, x, x^2, x^3$ es linealmente independiente en el intervalo $(-\infty, +\infty)$. En efecto, la igualdad $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = 0$ puede cumplirse para todos los valores de $x \in (-\infty, +\infty)$ solamente cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Si al menos uno de estos números es diferente de cero, en el primer miembro de esta igualdad tendremos un polinomio de grado no superior al tercero; éste puede convertirse en cero no más que para tres valores de x del intervalo considerado

Ejemplo 2. El sistema de funciones $e^{k_1 x}$, $e^{k_2 x}$, $e^{k_3 x}$, donde k_1, k_2, k_3 son distintos dos a dos, es linealmente independiente en el intervalo $-\infty < x < +\infty$.

Supongamos, por el contrario, que el sistema dado de funciones es linealmente dependiente en este intervalo. Entonces,

$$\alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2 e^{k_2 x} + \alpha_3 e^{k_3 x} \equiv 0 \qquad \text{(A)}$$

en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, siendo distinto de cero al menos uno de los números α_1, α_2, α_3; sea $\alpha_3 \neq 0$. Dividiendo ambos miembros de la identidad (A) por $e^{k_1 x}$, resulta

$$\alpha_1 + \alpha_2 e^{(k_2 - k_1)x} + \alpha_3 e^{(k_3 - k_1)x} \equiv 0. \qquad (1)$$

Derivando (1), obtenemos

$$\alpha_2 (k_2 - k_1) e^{(k_2 - k_1)x} + \alpha_3 (k_3 - k_1) e^{(k_3 - k_1)x} \equiv 0. \qquad (2)$$

Dividiendo ambos miembros de la identidad (2) por $e^{(k_2 - k_1)x}$, se tiene

$$\alpha_2 (k_2 - k_1) + \alpha_3 (k_3 - k_1) e^{(k_3 - k_2)x} \equiv 0. \qquad (3)$$

Derivando (3), obtenemos

$$\alpha_3 (k_3 - k_1)(k_3 - k_2) e^{(k_3-k_2)x} \equiv 0,$$

lo cual es imposible, ya que $\alpha_3 \neq 0$, por la hipótesis, $k_3 \neq k_1$, $k_3 \neq k_2$ y $e^{(k_3-k_2)x} \neq 0$.

La hipótesis sobre la dependencia lineal del sistema dado de funciones nos conduce a una contradicción. Por consiguiente, este sistema de funciones es linealmente independiente en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, o sea, la identidad (A) se cumple solamente cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Ejemplo 3. El sistema de funciones $e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$, $e^{\alpha x} \cos \beta x$, donde $\beta \neq 0$, es linealmente independiente en el intervalo $-\infty < x < +\infty$.

Determinemos unos valores α_1 y α_2 de modo que se cumpla la identidad

$$\alpha_1 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x + \alpha_2 e^{\alpha x} \cos \beta x \equiv 0. \tag{1}$$

Dividiendo ambos miembros de esta identidad por $e^{\alpha x} \neq 0$, resulta

$$\alpha_1 \operatorname{sen} \beta x + \alpha_2 \cos \beta x \equiv 0. \tag{2}$$

Poniendo en (2) el valor $x = 0$, obtenemos $\alpha_2 = 0$ y, por consiguiente, $\alpha_1 \operatorname{sen} \beta x \equiv 0$; pero la función $\operatorname{sen} \beta x$ no es idénticamente igual a cero, por lo cual, $\alpha_1 = 0$. La identidad (2) y, por lo tanto, la identidad (1), subsisten solamente cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, o sea, las funciones consideradas son linealmente independientes en el intervalo $-\infty < x < +\infty$.

Nota. En particular, queda demostrado que las funciones trigonométricas $\operatorname{sen} \beta x$, $\cos \beta x$, son linealmente independientes.

Ejemplo 4. Las funciones $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$, $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ son linealmente dependientes en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Demostremos que existen tales números α_1, α_2, α_3, no todos iguales a cero, que en el intervalo $-\infty < x < +\infty$ tiene lugar la identidad

$$\alpha_1 \operatorname{sen} x + \alpha_2 \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \alpha_3 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \equiv 0. \tag{A}$$

Suponiendo que la identidad (A) está cumplida, hagamos, por ejemplo, $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{2}$. Entonces, obtendremos el sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas α_1, α_2, α_3:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} - \alpha_3 \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} &= 0 \\ \alpha_1 \frac{1}{\sqrt{2}} + \alpha_2 \operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} + \alpha_3 \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \operatorname{sen}\frac{5\pi}{8} + \alpha_3 \operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

El determinante de este sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} & \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} \\ 1 & \operatorname{sen}\frac{5\pi}{8} & \operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} \end{vmatrix}$$

es igual a cero.

Por consiguiente, las soluciones del sistema homogéneo (1) no son nulas, o sea, existen tales números α_1, α_2, α_3 uno por lo menos, de los cuales difiere de cero.

Para hallar estos ternos de números α_1, α_2, α_3 tomemos, por ejemplo, las dos primeras ecuaciones del sistema (1):

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} - \alpha_3 \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} &= 0 \\ \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}} + \alpha_2 \operatorname{sen}\frac{3}{8}\pi + \alpha_3 \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

De la primera ecuación tenemos $\alpha_2=\alpha_3$; de la segunda,

$$\alpha_1 = -2\cos\frac{\pi}{8}\cdot\alpha_3.$$

Haciendo $\alpha_3=1$ obtendremos la solución no nula de este sistema (1)

$$\alpha_1 = -2\cos\frac{\pi}{8}, \quad \alpha_2=1, \quad \alpha_3=1.$$

Demostremos ahora que para estos valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ la identidad (A) se cumple para todos los $x \in (-\infty, +\infty)$ *). Tenemos, cualquiera que sea x,

$$\alpha_1 \operatorname{sen} x + \alpha_2 \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \alpha_3 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \equiv$$

$$\equiv -2\cos\frac{\pi}{8}\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x \cos\frac{\pi}{8} \equiv 0.$$

Por consiguiente, el sistema dado de funciones es linealmente dependiente en el intervalo $-\infty < x < +\infty$.

Nota. Se puede enunciar otro criterio de independencia lineal para el caso de dos funciones. Las funciones $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ son linealmente independientes en el intervalo (a, b) si la razón $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$ no es idénticamente constante: $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \not\equiv \text{const}$ en este intervalo; si $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \equiv \text{const}$, las funciones serán linealmente dependientes. **)

Ejemplo 5. Las funciones $\operatorname{tg} x$ y $\operatorname{ctg} x$ son linealmente independientes en el intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, puesto que la razón $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x} = \operatorname{tg}^2 x \not\equiv \text{const}$ en este intervalo.

Ejemplo 6. Las funciones $\operatorname{sen} 2x$ y $\operatorname{sen} x \cos x$ son linealmente dependientes en el intervalo $-\infty < x < +\infty$, puesto que la razón $\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x \cos x} \equiv \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen} x \cos x} \equiv 2$ (en los puntos de discontinuidad de la función $\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x \cos x}$, esta razón se completa asignándole su "verdadero valor", de modo que resulte una función continua).

---

*) Se puede establecer la dependencia lineal de las funciones $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$, $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ admitiendo que $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \equiv 2\cos\frac{\pi}{8}\operatorname{sen} x$ ó $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{8}\right) - 2\cos\frac{\pi}{8}\operatorname{sen} x \equiv 0$.

**) También se puede señalar otro criterio de dependencia lineal de n funciones ($n \geqslant 1$):

Las funciones $y_1(x), y_2x, \ldots, y_n(x)$ son linealmente dependientes en el intervalo (a, b), si al menos una de ellas puede expresarse en este intervalo como combinación lineal de las restantes. En caso contrario, el sistema de funciones es linealmente independiente. *(Nota del T.)*

Averiguar si las funciones dadas son linealmente independientes en su campo de definición.

436. $4,\ x$.

437. $1,\ 2,\ x,\ x^2$.

438. $x,\ 2x,\ x^2$.

439. $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x$.

440. $\operatorname{sen} x,\ \cos x,\ \cos 2x$.

441. $1,\ \operatorname{sen} x,\ \cos 2x$.

442. $5,\ \cos^2 x,\ \operatorname{sen}^2 x$.

443. $\cos x,\ \cos(x+1),\ \cos(x-2)$.

444. $1,\ \operatorname{sen} 2x,\ (\operatorname{sen} x - \cos x)^2$.

445. $x,\ a^{\lg_a x}\quad (x < 0)$.

446. $\lg_a x,\ \lg_a x^2\quad (x > 0)$.

447. $1,\ \operatorname{arcsen} x,\ \arccos x$.

448. $5,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x$.

449. $2\pi,\ \operatorname{arctg}\frac{x}{2\pi},\ \operatorname{arcctg}\frac{x}{2\pi}$.

450. $e^{-\frac{ax^2}{2}},\ e^{-\frac{ax^2}{2}}\int_0^x e^{\frac{at^2}{2}}\,dt$.

451. $x,\ x\int_{x_0}^{1}\frac{e^t}{t^2}\,dt\quad (x_0 > 0)$.

Supongamos que las n funciones $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ admiten derivadas hasta el orden $(n-1)$. El determinante

$$W[y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

se llama *determinante de Wronsky* (o wronskiano) de estas funciones. Obsérvese que, por lo general, el wronskiano es una función de x definida en cierto intervalo.

Para el caso de tres funciones, el wronskiano tiene la forma

$$W[y_1, y_2, y_3]=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix}.$$

Ejemplo 7. Hallar el wronskiano de las funciones

$$y_1(x)=e^{k_1x},\quad y_2(x)=e^{k_2x},\quad y_3(x)=e^{k_3x}.$$

Solución. Se tiene

$$W[y_1, y_2, y_3]=\begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} & e^{k_3x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} & k_3e^{k_3x} \\ k_1^2e^{k_1x} & k_2^2e^{k_2x} & k_3^2e^{k_3x} \end{vmatrix}=$$

$$=e^{(k_1+k_2+k_3)x}(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_3-k_2).$$

Ejemplo 8. Hallar el wronskiano de las funciones

$$y_1(x)=\operatorname{sen} x,\quad y_2(x)=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{8}\right),\quad y_3(x)=\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{8}\right).$$

Solución. Se tiene

$$W[y_1, y_2, y_3]=$$

$$=\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{8}\right) & \operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \\ \cos x & \cos\left(x+\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \\ -\operatorname{sen} x & -\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{8}\right) & -\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \end{vmatrix}=0,$$

puesto que la primera y última filas del determinante son proporcionales.

En los siguientes ejercicios se pide hallar el wronskiano de los sistemas de funciones indicados:

452. $1,\ x.$

453. $x,\ \frac{1}{x}.$

454. $1,\ 2,\ x^2.$

455. $e^{-x},\ xe^{-x}.$

456. $e^x,\ 2e^x,\ e^{-x}.$

457. $2,\ \cos x,\ \cos 2x.$

458. $\operatorname{sen} x, \quad \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

459. $\arccos\frac{x}{\pi}, \ \operatorname{arcsen}\frac{x}{\pi}$.

460. $\pi, \ \operatorname{arcsen} x, \ \arccos x$.

461. $4, \ \operatorname{sen}^2 x, \ \cos 2x$.

462. $x, \ \ln x$.

463. $\frac{1}{x}, \ e^{\frac{1}{x}}$.

464. $e^x \operatorname{sen} x, \ e^x \cos x$.

465. $e^{-3x} \operatorname{sen} 2x, \ e^{-3x} \cos 2x$.

466. $\cos x, \ \operatorname{sen} x$.

467. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-x\right), \ \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

Subsiste el siguiente teorema.

Teorema. Si el sistema de funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots$ $\ldots, y_n(x)$ es linealmente dependiente en el segmento $[a, b]$, su wronskiano es idénticamente nulo en $[a, b]$.

Así, pues, el sistema de funciones $\operatorname{sen} x, \quad \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$, $\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$ es linealmente dependiente en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ y, como fácilmente se comprueba, su wronskiano es igual a cero (véanse los ejemplos 4 y 8).

Este teorema solamente indica la condición necesaria para la dependencia lineal de un sistema de funciones. El recíproco no se cumple, puesto que, el wronskiano puede ser nulo también cuando las funciones consideradas forman en el intervalo un sistema linealmente independiente.

Ejemplo 9. Examinemos las funciones

$$y_1(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2, & \text{si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$y_2(x)=\begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Sus gráficas tienen la forma que se muestra en la fig. 21.

Este sistema de funciones es linealmente independiente, puesto que solamente para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ se cumple la identidad $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv \equiv 0$. En efecto, considerándola en el segmento $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, obtenemos $\alpha_2 y_2(x) \equiv \equiv 0$, de donde $\alpha_2 = 0$, puesto que $y_2(x) \not\equiv 0$; no obstante, en el segmento $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ se tiene $\alpha_1 y_1(x) \equiv \equiv 0$, de donde $\alpha_1 = 0$, puesto que $y_1(x) \not\equiv 0$ en este segmento.

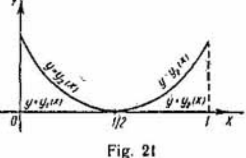


Fig. 21

Consideremos el wronskiano del sistema $W[y_1, y_2]$.

En el segmento $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} 0 & \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\ 0 & 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \end{vmatrix} = 0,$$

en el segmento $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 & 0 \\ 2\left(x - \frac{1}{2}\right) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Por lo tanto, $W[y_1, y_2] \equiv 0$ en el segmento $[0, 1]$.

En los siguientes problemas se pide demostrar que las funciones dadas son linealmente independientes y su wronskiano es idénticamente nulo. Construir las gráficas de estas funciones.

468.
$$y_1(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0, & \text{si } \quad 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$
$$y_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ x^2, & \text{si } \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

469. $y_1(x)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant 2 \\ (x-2)^2, & \text{si} \quad 2<x\leqslant 4, \end{cases}$

$y_2(x)=\begin{cases} (x-2)^2, & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant 2 \\ 0, & \text{si} \quad 2<x\leqslant 4, \end{cases}$

470. $y_1(x)=\begin{cases} x^3, & \text{si} \quad -2\leqslant x\leqslant 0 \\ 0, & \text{si} \quad 0<x\leqslant 1, \end{cases}$

$y_2(x)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad -2\leqslant x\leqslant 0 \\ x^2, & \text{si} \quad 0<x\leqslant 1. \end{cases}$

471. $y_1(x)=x^2$, $y_2(x)=x|x|$; $-1\leqslant x\leqslant 1$.

Veamos un criterio más de dependencia lineal de un sistema de funciones.

Supongamos que se considera un sistema de funciones $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ dadas en el segmento $[a, b]$.

Hagamos $(y_i, y_j)=\int_a^b y_i(x)y_j(x)\,dx$ $(i\ j=1, 2, \ldots, n.)$

El determinante

$$\Gamma(y_1, y_2, \ldots, y_n)=\begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \ldots & (y_1, y_n) \\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \ldots & (y_2, y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (y_n, y_1) & (y_n, y_2) & \ldots & (y_n, y_n) \end{vmatrix}$$

se denomina determinante de Gram del sistema de funciones $\{y_k(x)\}$.

Teorema. Para que el sistema de funciones $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ sea linealmente dependiente es necesario y suficiente que su determinante de Gram sea igual a cero.

Ejemplo 10. Demostrar que las funciones $y_1=x$, $y_2=2x$ son linealmente dependientes en el segmento $[0, 1]$ *).

---

*) La dependencia linea de estas funciones en cualquier segmento es consecuencia inmediata del criterio expuesto en la nota de la pág. 101 (Véase también la nota del T. en la pág. 101. En este caso, $y_2=2y_1$. *(Nota del T.)*

Solución Se tiene

$$(y_1 y_1)=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3};\quad (y_1 y_2)=(y_2 y_1)=\int_0^1 2x^2\,dx=\frac{2}{3};$$

$$(y_2,\ y_2)=\int_0^1 4x^2\,dx=\frac{4}{3}.$$

$$\Gamma(y_1,\ y_2)=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3}\end{vmatrix}=0,$$

por consiguiente, las funciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son linealmente dependientes.

472. Empleando el criterio expuesto, comprobar que las funciones en los ejemplos 438, 442, 444 son linealmente dependientes en el segmento $[-\pi,\ \pi]$.

2. ECUACIONES LINEALES HOMOGENEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES

Sea dada la ecuación diferencial

$$a_0 y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\ \ldots\ +a_n y=0, \qquad (1)$$

donde $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ son constantes reales.

Consideremos la ecuación característica

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ \ldots\ +a_n=0. \qquad (2)$$

Supongamos que $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ son las raices de la ecuación (2), entre las cuales puede haber múltiples.

Se pueden presentar los casos siguientes:

a) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ son reales y distintas.

En este caso, el sistema fundamental de soluciones de la ecuación (1) tiene la forma:

$$e^{\lambda_1 x},\quad e^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ e^{\lambda_n x}$$

y la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_g=C_1 e^{\lambda_1 x}+C_2 e^{\lambda_2 x}+\ \ldots\ +C_n e^{\lambda_n x};$$

b) las raices de la ecuación característica son reales, pero algunas de ellas son múltiples.

Sea, por ejemplo, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = \tilde{\lambda}$, de modo que $\tilde{\lambda}$ es una raíz k — múltiple de la ecuación (2), mientras que todas las demás n — k raíces son distintas.

En este caso, el sistema fundamental de soluciones tiene la forma

$$e^{\tilde{\lambda}x},\quad xe^{\tilde{\lambda}x},\quad x^2e^{\tilde{\lambda}x}, \ldots, x^{k-1}e^{\tilde{\lambda}x},\quad e^{\lambda_{k+1}x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$$

y la solución general es

$$y_g = C_1e^{\tilde{\lambda}_1 x} + C_2xe^{\tilde{\lambda}x} + C_3x^2e^{\tilde{\lambda}x} + \ldots + C_kx^{k-1}e^{\tilde{\lambda}x} + \\ + C_{k+1}e^{\lambda_{k+1}x} + \ldots + C_ne^{\lambda_n x};$$

c) algunas de las raíces de la ecuación característica son imaginarias.

Para fijar ideas, supongamos que $\lambda_1 = \alpha + i\beta$; $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\lambda_3 = \gamma + i\delta$, $\lambda_4 = \gamma - i\delta$, $\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$, y que las demás raices son reales como, por la hipótesis, los coeficientes a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ de la ecuación (1) son reales, las raíces imaginarias de la ecuación (2) son conjugadas dos a dos.

En este caso, el sistema fundamental de soluciones tiene la forma

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ e^{\gamma x}\cos\delta x,\ e^{\gamma x}\operatorname{sen}\delta x,\ e^{\lambda_5 x},\ e^{\lambda_6 x}, \ldots, e^{\lambda_n x},$$

y la solución general es

$$y_g = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x + C_3e^{\gamma x}\cos\delta x + \\ + C_4e^{\gamma x}\operatorname{sen}\delta x + C_5e^{\lambda_5 x} + \ldots + C_ne^{\lambda_n x};$$

d) si $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ es una raíz k — múltiple de la ecuación (2) $\left(k \leqslant \frac{n}{2}\right)$, entonces, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ también será una raíz k — múltiple y el sistema fundamental de soluciones tendrá la forma:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \ldots \\ \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ e^{\lambda_{2k+1}x}, \ldots, e^{\lambda_n x}.$$

Por consiguiente, la solución general es:

$$y_g = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x + C_3xe^{\alpha x}\cos\beta x + \\ + C_4xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x + \ldots + C_{2k-1}x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x + \\ + C_{2k}x^{k-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x + C_{2k+1}e^{\lambda_{2k+1}x} + \ldots + C_ne^{\lambda_n x}.$$

Ejemplo 1. Hallar la solución general de la ecuación

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

Solución. Formamos la ecuación característica

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0.$$

Hallamos sus raíces: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$. Como éstas son reales y distintas, la solución general tiene la forma

$$y_g = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}.$$

Ejemplo 2. Hallar la solución general de la ecuación

$$y''' + 2y'' + y' = 0$$

Solución. La ecuación característica tiene la forma

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0.$$

De aquí hallamos: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$. Las raíces son reales. Una de ellas (precisamente $\lambda = -1$) es múltiple, de segundo orden, por lo cual, la solución general es:

$$y_g = C_1 e^{-x} + C_3 x e^{-x} + C_3.$$

Ejemplo 3. Hallar la solución general de la ecuación

$$y''' + 4y'' + 13y' = 0.$$

Solución. La ecuación característica

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = 0$$

tiene las siguientes raíces:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2 - 3i, \quad \lambda_3 = -2 + 3i.$$

La solución general es:

$$y_g = C_1 + C_2 e^{-2x} \cos 3x + C_3 e^{-2x} \operatorname{sen} 3x.$$

Ejemplo 4. Hallar la solución general de la ecuación

$$y^{V} - 2y^{IV} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0.$$

Solución. La ecuación característica

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

o bien,

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2 = 0.$$

tiene las siguientes raices: $\lambda = 2$ es una raíz simple y $\lambda = \pm i$ es un par de raíces imaginarias de segundo orden. La solución general es

$$y_g = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x) \cos x (C_4 + C_5 x) \operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 5. Resolver la ecuación

$$y^{IV} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

Solución. Formamos la ecuación característica $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0$, o bien, $(\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0$. Esta tiene las raíces imaginarias de segundo orden:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 - i, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -1 + i,$$

y, por consiguiente, la solución general tiene la forma

$$y_g = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \operatorname{sen} x + C_3 x e^{-x} \cos x + C_4 x e^{-x} \operatorname{sen} x,$$

o bien,

$$y_g = e^{-x} (C_1 + C_2 x) \cos x + e^{-x} (C_3 + C_4 x) \operatorname{sen} x.$$

Formar las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas conociendo sus ecuaciones características.

473. $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$

474. $2\lambda^2 - 3\lambda - 5 = 0.$

475. $\lambda (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0.$

476. $(\lambda^2 + 1)^2 = 0.$

477. $\lambda^3 = 0.$

Formar las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas si se conocen las raíces de sus ecuaciones características y escribir sus soluciones generales.

478. $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2.$

479. $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1.$

480. $\lambda_1 = 3 - 2i, \ \lambda_2 = 3 + 2i.$

481. $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 1.$

Formar las ecuaciones diferenciales lineales homogeneas si se dan sus sistemas fundamentales de soluciones.

482. $e^{-x}, \ e^{x}.$

483. $1, \ e^{x}.$

484. e^{-2x}, xe^{-2x}.

485. $\operatorname{sen} 3x$, $\cos 3x$.

486. 1, x.

487. e^{x}, e^{2x}, e^{3x}.

488. e^{x}, xe^{x}, x^2e^{x}.

489. e^{x}, xe^{x}, e^{2x}.

490. 1, x, e^{x}.

491. 1, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$.

492. e^{2x}, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$.

493. 1, $e^{-x}\operatorname{sen} x$, $e^{-x}\cos x$,

Integrar las siguientes ecuaciones:

494. $y'' - y = 0$.

495. $3y'' - 2y' - 8y = 0$.

496. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$,
$y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$.

497. $y'' + 2y' + y = 0$.

498. $y'' - 4y' + 3y = 0$.
$y(0) = 6$, $y'(0) = 10$.

499. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$.

500. $y'' - 2y' - 2y = 0$.

501. $y^{VI} + 2y^{V} + y^{IV} = 0$.

502. $4y'' - 8y' + 5y = 0$.

503. $y''' - 8y = 0$.

504. $y^{IV} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$.

505. $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

506. $y'' - 2y' + 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

507. $y^{IV} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0$.

508. $y^{V} + 4y^{IV} + 5y''' - 6y' - 4y = 0$.

509. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$.

510. $y''' - 2y'' + 2y' = 0$.

511. $y^{IV} - y = 0$.

512. $y^{X} = 0$.

513. $y''' - 3y' - 2y = 0$.

514. $2y''' - 3y'' + y' = 0$.

3. ECUACIONES LINEALES NO HOMOGENEAS (O COMPLETAS) DE COEFICIENTES CONSTANTES

Sea dada la ecuación diferencial

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = f(x) \qquad (1)$$

de coeficientes constantes reales $a_0, a_1, \dots, a_n$.

La solución general de la ecuación no homogénea (1) (llamada también completa) es igual a la suma de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente y de cualquier solución particular de la ecuación no homogénea.

La solución general de la ecuación homogénea correspondiente se halla según las reglas expuestas anteriormente en el apartado 2. Por lo tanto, el problema de la integración de la ecuación (1) se reduce al problema de la búsqueda de una solución particular y_p de la ecuación no homogénea. En el caso general, la integración de la ecuación (1) puede realizarse por el método de variación de las constantes arbitrarias. No obstante, cuando los segundos miembros tienen una forma especial la solución particular puede hallarse con mayor facilidad por el método de selección.

Para que sea posible emplear el método de selección, el segundo miembro $f(x)$ de la ecuación (1) tiene que tener, en el caso general, la forma:

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\operatorname{sen}\beta x], \qquad (2)$$

donde $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ son polinomios de grado n y m, respectivamente. En este caso, se busca una solución particular y_p de la ecuación (1) de la forma

$$y_p = x^s e^{\alpha x}[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\operatorname{sen}\beta x], \qquad (3)$$

donde $k = \max(m, n)$, $\tilde{P}_k(x)$ y $\tilde{Q}_k(x)$ son polinomios en x de grado k, de coeficientes indeterminados, y s es el orden de multiplicidad de la raíz $\lambda = \alpha \pm i\beta$ de la ecuación característica ($s = 0$, si $\alpha \pm i\beta$ no son raíces de la ecuación característica).

Si el segundo miembro $f(x)$ representa una suma

$$f(x) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i f_i(x), \qquad (4)$$

donde $f_i(x)$ son de la forma (3), en virtud del principio de superposición se busca una solución particular y_p de la ecuación (1) de la forma

$$y_p = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i y_{ip}$$

He aquí un cuadro sinóptico de las formas de soluciones particulares para distintas formas de segundos miembros.

№ de orden	Segundo miembro de la ecuación diferencial	Raíces de la ecuación característica	Forma de la solución particular, donde $k = \text{máx}\ (m,\ n)$
I	$P_m(x)$	1. El número 0 no es raíz de la ecuación característica	$\widetilde{P}_m(x)$
		2. El número 0 es raíz de la ecuación característica de orden s	$x^s\widetilde{P}_m(x)$
II	$P_m(x)\,e^{\alpha x}$ (α es real)	1. El número α no es raíz de la ecuación característica	$\widetilde{P}_m(x)\,e^{\alpha x}$
		2. El número α es raíz de la ecuación característica de orden s	$x^s\widetilde{P}_m(x)\,{}^{\alpha x}$
III	$P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\,\text{sen}\,\beta x$	1. Los números $\pm i\beta$ no son raíces de la ecuación característica	$\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\,\text{sen}\,\beta x$
		2. Los números $\pm i\beta$ son raíces de la ecuación característica de orden s	$x^s(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\,\text{sen}\,\beta x)$
IV	$e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\,\text{sen}\,\beta x]$	1. Los números $\alpha \pm i\beta$ no son raíces de la ecuación característica	$(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\,\text{sen}\,\beta x)\,e^{\alpha x}$
		2. Los números $\alpha \pm i\beta$ son raíces de la ecuación característica de orden s	$x^s(\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_k(x)\,\text{sen}\,\beta x)\,e^{\alpha x}$

Ejemplo 1. Hallar la solución general de la ecuación

$$y''' - y'' + y' - y = x^2 + x.$$

Solución. La ecuación característica $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ tiene raíces distintas: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = i$, por lo cual, la solución general y_g de la ecuación homogénea correspondiente es:

$$y_g = C_1e^x + C_1\cos x + C_3\operatorname{sen} x.$$

Como el número 0 no es raiz de la ecuación característica, se debe buscar la solución particular y_p de la ecuación dada de la forma

$$y_p = A_1x^2 + A_2x + A_3,$$

donde A_1, A_2, A_3 son, por ahora, coeficientes indeterminados. Para hallarlos, se sustituye la expresión de y_p en la ecuación dada, resultando

$$-A_1x^2 + (2A_1 - A_2)x + (A_2 - 2A_1 - A_3) = x^2 + x,$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -1 \\ 2A_1 - A_2 &= 1 \\ A_2 - 2A_1 - A_3 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Resolviendo este sistema hallamos:

$$A_1 = -1, \quad A_2 = -3, \quad A_3 = -1.$$

Por consiguiente, la solución particular es

$$y_p = -x^2 - 3x - 1$$

y la solución general de la ecuación dada tiene la forma

$$y = C_1e^x + C_2\cos x + C_3\operatorname{sen} x - x^2 - 3x - 1.$$

Ejemplo 2. Hallar la solución general de la ecuación

$$y''' - y'' = 12x^2 + 6x.$$

Solución. La ecuación característica $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ tiene las raíces $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$, por lo cual, la solución general de la ecuación homogénea correspondiente es:

$$y_g = C_1 + C_2x + C_3ex.$$

Como el número 0 es raíz múltiple de segundo orden de la ecuación característica, se debe buscar una solución particular de la forma

$$y_p = x^2 (A_1 x^2 + A_2 x + A_3) = A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_3 x^2.$$

Sustituyendo la expresión de y_p en la ecuación dada, se tiene:

$$-12A_1 x^2 + (24A_1 - 6A_2) x + (6A_2 - 2A_3) = 12x^2 + 6x,$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} -12A_1 &= 12 \\ 24A_1 - 6A_2 &= 6 \\ 6A_2 - 2A_3 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

La solución de este sistema es: $A_1 = -1$, $A_2 = -5$, $A_3 = -15$. Por lo tanto,

$$y_p = -x^4 - 5x^3 - 15x^2.$$

La solución general de la ecuación dada es:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2.$$

Ejemplo 3. Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' - 6y' + 9y = 25e^x \operatorname{sen} x.$$

Solución. La ecuación característica $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ tiene las raíces $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$; la solución general y_g de la ecuación homogénea es $y_g = (C_1 + C_2 x) e^{3x}$. Se busca una solución particular y_p de la forma

$$y_p = e^x (a \cos x + b \operatorname{sen} x).$$

Poniendo la expresión de y_p en la ecuación y simplificando ambos miembros de ésta por e^x, obtenemos

$$(3a - 4b) \cos x + (4a + 3b) \operatorname{sen} x = 25 \operatorname{sen} x.$$

De aquí resulta

$$\left.\begin{aligned} 3a - 4b &= 0 \\ 4a + 3b &= 25 \end{aligned}\right\}.$$

La solución de este sistema es: $a = 4$, $b = 3$. Por consiguiente,

$$y_p = e^x (4 \cos x + 3 \operatorname{sen} x).$$

La solución general de la ecuación dada es:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{3x} + e^x (4 \cos x + 3 \operatorname{sen} x).$$

Cuando el segundo miembro $f(x)$ contiene las funciones trigonométricas $\operatorname{sen} \beta x$ y $\cos \beta x$, resulta conveniente pasar a las funciones exponenciales, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Supongamos que se necesita resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + y = x \cos x. \tag{1}$$

En este caso, $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$, y la solución general de la ecuación homogénea tiene la forma

$$y_g = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x.$$

Se debe buscar una solución particular y_p de la ecuación no homogénea de la forma

$$y_p = x [(A_1 x + A_2) \cos x + (B_1 x + B_2) \operatorname{sen} x].$$

Procederemos del modo siguiente. Consideremos la ecuación

$$z'' + z = x e^{ix}. \tag{2}$$

Fácilmente se observa que el segundo miembro de la ecuación inicial es la parte real del segundo miembro de la ecuación (2):

$$x \cos x = \operatorname{Re} (x e^{ix}).$$

Partiremos del principio de que, si la ecuación diferencial de coeficientes reales

$$L[y] = f_1(x) + i f_2(x)$$

tiene una solución $y = u(x) + i v(x)$, entonces, $u(x)$ es solución de la ecuación $L[y] = f_1(x)$, mientras que $v(x)$ es solución de la ecuación $L[y] = f_2(x)$.

Hallemos z_p para la ecuación (2):

$$z_p = (Ax + B) x e^{ix} = (Ax^2 + Bx) e^{ix},$$
$$z_p'' = 2A e^{ix} + 2(2Ax + B) i e^{ix} - (Ax^2 + Bx) e^{ix}.$$

Sustituyendo en la ecuación (2) y simplificando ambos miembros por e^{ix}, tendremos:

$$2A + 4Axi + 2Bi = x,$$

de donde

$$4Ai=1, \quad A=-\frac{i}{4},$$

$$A+Bi=0, \quad B=-\frac{A}{i}=\frac{1}{4}.$$

Por lo tanto,

$$z_p=\left(-\frac{i}{4}x^2+\frac{1}{4}x\right)e^{ix}=\left(-\frac{i}{4}x^2+\frac{1}{4}x\right)(\cos x+i\operatorname{sen} x)=$$

$$=\frac{x\cos x+x^2\operatorname{sen} x}{4}+i\,\frac{x\operatorname{sen} x-x^2\cos x}{4}.$$

$$\operatorname{Re} z_p=\frac{x\cos x+x^2\operatorname{sen} x}{4}=y_p \text{ de la ecuaciòn (1).}$$

A veces este método facilita y simplifica los cálculos relacionados con la búsqueda de las soluciones particulares.

Ejemplo 4.

$$y''+4y=\operatorname{sen} 2x. \tag{1}$$

Consideremos la ecuación

$$z''+4z=e^{2ix}, \tag{2}$$

$$\operatorname{sen} 2x=\operatorname{Im} e^{2ix},$$

$$z_p=Axe^{2ix},$$

$$z_p''=-4Axe^{2ix}+4iAe^{2ix}.$$

Sustituyendo en la ecuación (2), obtenemos

$$4iA=1, \quad A=-\frac{i}{4}.$$

$$z_p=-\frac{i}{4}xe^{2ix}=-\frac{i}{4}x(\cos 2x+i\operatorname{sen} 2x)=$$

$$=\frac{1}{4}x\operatorname{sen} 2x-i\frac{x}{4}\cos 2x.$$

$$\operatorname{Im} z_p=-\frac{x}{4}\cos 2x=y_p \text{ de la ecuación (1).}$$

Determinar la forma de la solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea, si se conocen las raíces de su ecuación característica y el segundo miembro $f(x)$:

515. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2;\quad f(x) = ax^2 + bx + c.$

516. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1;\quad f(x) = ax^2 + bx + c.$

517. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0;\quad f(x) = ax^2 + bx + c.$

518. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2;\quad f(x) = e^{-x}(ax + b).$

519. $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1;\quad f(x) = e^{-x}(ax + b).$

520. $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -1;\quad f(x) = e^{-x}(ax + b).$

521. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1;\quad f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x.$

522. $\lambda_1 = -i,\ \lambda_2 = i;\quad f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x.$

523. $\lambda_1 = -2i,\ \lambda_2 = 2i;\quad f(x) = A \operatorname{sen} 2x + B \cos 2x.$

524. $\lambda_1 = -ki,\ \lambda_2 = ki;\quad f(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx.$

525. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1;\quad f(x) = e^{-x}(A \operatorname{sen} x + B \cos x).$

526. $\lambda_1 = -1 - i,\ \lambda_2 = -1 + i;$
$f(x) = e^{-x}(A \operatorname{sen} x + B \cos x).$

527. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1,\quad f(x) = ax^2 + bx + c.$

528. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2;\quad f(x) = ax^2 + bx + c.$

529. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1;\quad f(x) = ax^2 + bx + c.$

530. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0;\quad f(x) = ax^2 + bx + c.$

531. $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i,\ \lambda_3 = 1:\quad f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x.$

532. a) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$
b) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$
c) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1$
d) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$
e) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$
f) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$
$\Bigg\}\ f(x) = ae^{-x} + be^{x}.$

533. a) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$
b) $\lambda_1 = k,\ \lambda_2 = 1$
c) $\lambda_1 = \lambda_2 = k$
d) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1$
e) $\lambda_1 = \lambda_2 = k,\ \lambda_3 = 1$
f) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = k$
$\Bigg\}\ f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{kx},\ k \neq 0,\ k \neq 1.$

534. a) $\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=2$
b) $\lambda_1=-i,\ \lambda_2=i,\ \lambda_3=0$ } $f(x)=a\,\mathrm{sen}\,x+b\cos x$.

535. a) $\lambda_1=3-2i,\ \lambda_2=3+2i,$
$\lambda_3=\lambda_4=0.$
b) $\lambda_1=\lambda_2=3-2i,$
$\lambda_3=\lambda_4=3+2i$ } $f(x)=e^{3x}(\mathrm{sen}\,2x+\cos 2x)$.

Determinar la forma de la solución particular para las siguientes ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas:

536. $y''+3y'=3$.

537. $y''-7y'=(x-1)^2$.

538. $y''+3y'=e^x$.

539. $y''+7y'=e^{-7x}$.

540. $y''-8y'+16y=(1-x)e^{4x}$.

541. $y''-10y'+25y=e^{5x}$.

542. $4y''-3y'=xe^{\frac{3}{4}x}$.

543. $y''-y'-2y=e^x+e^{-2x}$.

544. $y''-4y'=xe^{4x}$.

545. $y''+25y=\cos 5x$.

546. $y''+y=\mathrm{sen}\,x-\cos x$.

547. $y''+16y=\mathrm{sen}\,(4x+\alpha)$.

548. $y''+4y'+8y=e^{2x}(\mathrm{sen}\,2x+\cos 2x)$.

549. $y''-4y'+8y=e^{2x}(\mathrm{sen}\,2x-\cos 2x)$.

550. $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cos 2x$.

551. $y''+k^2y=k\,\mathrm{sen}\,(kx+\alpha)$.

552. $y''+k^2y=k$.

553. $y''+4y=\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,2x$.

554. $y''-4y'=2\cos^2 4x$.

555. $y'''+y=x$.

556. $y'''+6y''+11y'+6y=1$.

557. $y'''+y'=2$.

558. $y''' + y'' = 3$.

559. $y^{IV} - y = 1$.

560. $y^{IV} - y' = 2$.

561. $y^{IV} - y'' = 3$.

562. $y^{IV} - y''' = 4$.

563. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = 1$.

564. $y^{IV} + 2y''' + y'' = e^{4x}$.

565. $y^{IV} + 2y''' + y'' = e^{-x}$.

566. $y^{IV} + 2y''' + y'' = xe^{-x}$.

567. $y^{IV} + 4y'' + 4y = \operatorname{sen} 2x$.

568. $y^{IV} + 4y'' + 4y = \cos x$.

569. $y^{IV} + 4y'' + 4y = x \operatorname{sen} 2x$.

570. $y^{IV} + 2n^2y'' + n^4y = a \operatorname{sen}(nx + \alpha)$.

571. $y^{IV} - 2n^2y'' + n^4y = \cos(nx + \alpha)$.

572. $y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = \operatorname{sen} x$.

573. $y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = e^{x}$.

574. $y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = xe^{x}$.

Resolver las siguientes ecuaciones:

575. $y'' + 2y' + y = -2$.

576. $y'' + 2y' + 2 = 0$.

577. $y'' + 9y - 9 = 0$.

578. $y''' + y'' = 1$.

579. $5y''' - 7y'' - 3 = 0$.

580. $y^{IV} - 6y''' + 6 = 0$.

581. $3y^{IV} + y''' = 2$.

582. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 1$.

583. $y'' - 4y' + 4y = x^2$.

584. $y'' + 8y' = 8x$.

585. $y'' - 2ky' + k^2y = e^{x}$, $(k \neq 1)$.

586. $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$.

587. $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$.
588. $7y'' - y' = 14x$.
589. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$.
590. $y'' + 5y' + 6y = 10(1 - x)e^{-2x}$.
591. $y'' + 2y' + 2y = 1 + x$.
592. $y'' + y' + y = (x + x^2)e^x$.
593. $y'' + 4y' - 2y = 8 \operatorname{sen} 2x$.
594. $y'' + y = 4x \cos x$.
595. $y'' - 2my' + m^2 y = \operatorname{sen} nx$.
596. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \operatorname{sen} 2x$.
597. $y'' + a^2 y = 2 \cos mx + 3 \operatorname{sen} mx \qquad (m \neq a)$.
598. $y'' - y' = e^x \operatorname{sen} x$.
599. $y'' + 2y' = 4e^x (\operatorname{sen} x + \cos x)$.
600. $y'' + 4y' + 5y = 10e^{-2x} \cos x$.
601. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(2x + \operatorname{sen} 2x)$.
602. $4y'' + 8y' = x \operatorname{sen} x$.
603. $y'' - 3y' + 2y = xe^x$.
604. $y'' + y' - 2y = x^2 e^{4x}$.
605. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$.
606. $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.
607. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x$.
608. $y'' - 2y' + y = x^3$.
609. $5y'' - 6y' + 5y = 13e^x \operatorname{ch} x$.
610. $y^{IV} + y'' = x^2 + x$.
611. $y^{V} - y^{IV} = xe^x - 1$.
612. $y'' + y = x^2 \operatorname{sen} x$.
613. $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x} \cos x$.
614. $y''' - 4y' = xe^{2x} + \operatorname{sen} x + x^2$.
615. $y''' - y = \operatorname{sen} x$.
616. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x + xe^{-x}$.
617. $y^{IV} - 2y'' + y = \cos x$.

618. $y'' + y = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x.$

619. $y'' + 4y = x \operatorname{sen}^2 x.$

620. $y^{\text{IV}} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{2} \cos x.$

621. $y'' + y' = \cos^2 x + e^x + x^2.$

622. $y^{\text{V}} + 4y''' = e^x + 3 \operatorname{sen} 2x + 1.$

623. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x \cos 2x.$

624. $y''' - 2y' + 4y = e^x \cos x + x^2 + \operatorname{sen} 2x.$

625. $y'' + y' = x^2 - e^{-x} + e^x.$

626. $y'' - 2y' - 3y = 2x + e^{-x} - 2e^{3x}.$

627. $y'' + 4y = e^x + 4 \operatorname{sen} 2x + 2 \cos^2 x - 1.$

628. $y'' + 3y' + 2y = 6xe^{-x} (1 - e^{-x}).$

629. $y'' + y = \cos^2 2x + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}.$

630. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} (\operatorname{sen} x + 2 \cos x).$

631. $y'' - 4y' + 5y = 1 + \cos^2 x + e^{2x}.$

632. $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}.$

633. $y'' - 3y' = 1 + e^x + \cos x + \operatorname{sen} x.$

634. $y'' - 2y' + 5y = e^x (1 - 2 \operatorname{sen}^2 x) + 10x + 1.$

635. $y'' - 4y' + 4y = 4x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x.$

636. $y'' + 2y' + y = 1 + 2 \cos x + \cos 2x - \operatorname{sen} 2x.$

637. $y'' + y' + y + 1 = \operatorname{sen} x + x + x^2.$

638. $y'' + 6y' + 9y = 9xe^{-3x} + 1 + 9 \operatorname{sen} x.$

639. $y'' + 2y' + 1 = 3 \operatorname{sen} 2x + \cos x.$

En los siguientes problemas se necesita hallar las soluciones particulares de las ecuaciones que cumplen las condiciones iniciales dadas:

640. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7) e^{-x}; \quad y(0) = y'(0) = 0.$

641. $y'' + 9y = 6e^{3x}; \quad y(0) = y'(0) = 0.$

642. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x; \quad y(0) = 2, \ y'(0) = 3.$

643. $y'' + 6y' + 9y = 10 \operatorname{sen} x; \quad y(0) = y'(0) = 0.$

644. $y'' + y = 2\cos x$; $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

645. $y'' + 4y = \operatorname{sen} x$; $\quad y(0) = y'(0) = 1.$

646. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$; $y(0) = \frac{4}{3},\ y'(0) = \frac{1}{27}.$

647. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$; $\quad y(0) = 2,\ y'(0) = 8.$

648. $y'' + 4y = 4(\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$; $\quad y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi.$

649. $y'' - y' = -5e^{-x}(\operatorname{sen} x + \cos x)$; $y(0) = -4,\ y'(0) = 5.$

650. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$; $\quad y(\pi) = \pi e^{\pi},\ y'(\pi) = e^{\pi}.$

651. $y''' - y' = -2x$; $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2.$

652. $y^{IV} - y = 8e^x$; $\quad y(0) = -1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1,$
$y'''(0) = 0.$

653. $y''' - y = 2x$; $\quad y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 2.$

654. $y^{IV} - y = 8e^x$; $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 4,$
$y'''(0) = 6.$

En los siguientes problemas se necesita hallar las so- ciones particulares de las ecuaciones que cumplen en el finito las condiciones dadas:

655. $y'' - 4y' + 5y = \operatorname{sen} x$, y es acotada para $x \to +\infty$.

656. $y'' + 2y' + 5y = 4\cos 2x + \operatorname{sen} 2x$, y es acotada para $x \to -\infty$.

657. $y'' - y = 1$, y es acotada para $x \to \infty$.

658. $y'' - y = -2\cos x$, y es acotada para $x \to \infty$.

659. $y'' - 2y' + y = 4e^{-x}$, $y \to 0$ para $x \to +\infty$.

660. $y'' + 4y' + 3y = 8e^x + 9$, $y \to 3$ para $x \to -\infty$.

661. $y'' - y' - 5y = 1$, $y \to -\frac{1}{5}$ para $x \to \infty$.

662. $y'' + 4y' + 4y = 2e^x(\operatorname{sen} x + 7\cos x)$, $y \to 0$ para $x \to -\infty$.

663. $y'' - 5y' + 6y = 2e^{-2x}(9\operatorname{sen} 2x + 4\cos 2x)$, $y \to 0$ para $x \to +\infty$.

664. $y'' - 4y' + 4y = (9x^2 + 5x - 12)e^{-x}$, $y \to 0$ para $x \to +\infty$.

4. ECUACIONES DE EULER

Las ecuaciones de la forma

$$a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=0, \quad (12)$$

donde todas las a_i son constantes, se llaman ecuaciones de Euler

Mediante la sustitución de la variable independiente

$$x=e^t,$$

estas ecuaciones se reducen a ecuaciones lineales homogéneas de coeficientes constantes:

$$b_0y_t^{(n)}+b_1y_t^{(n-1)}+\ldots+b_{n-1}y_t'+b_ny(t)=0. \quad (13)$$

Nota 1. Las ecuaciones de la forma

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots$$
$$\ldots+a_{n-1}(ax+b)y'+a_ny=0 \quad (14)$$

también se llaman ecuaciones de Euler y se reducen a ecuaciones lineales homogéneas de coeficientes constantes haciendo la sustitución de la variable

$$ax+b=e^t.$$

Nota 2. Para la ecuación (12) se pueden buscar directamente soluciones particulares de la forma

$$y=x^k,$$

obteniendo para k una ecuación que coincide con la ecuación característica de la ecuación (13).

Ejemplo. Hallar la solución general de la ecuación de Euler

$$x^2y''+2xy'-6y=0.$$

Primer método. Haciendo en la ecuación la sustitución $x=e^t$, se tiene:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)e^{-t}}{e^t}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

y la ecuación toma la forma

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-6y=0.$$

Las raíces de la ecuación característica son: $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=2$, y la solución general de la última ecuación es: $y=C_1e^{-3t}+C_2e^{2t}$. Pero, como $x=e^t$, resulta $y=C_1x^{-3}+C_2x^2$, o bien,

$$y=\frac{C_1}{x^3}+C_2x^2.$$

Segundo método. Se busca una solución de la ecuación dada de la forma $y=x^k$, donde k es un número desconocido. Se tiene

$$y'=kx^{k-1},\qquad y''=k(k-1)x^{k-2}.$$

Sustituyendo en la ecuación, resulta

$$x^2k(k-1)x^{k-2}+2xkx^{k-1}-6x^k=0,$$

o bien

$$x^k[k(k-1)+2k-6]=0.$$

Pero, como $x^k\neq 0$, se tiene $k(k-1)+2k-6=0$, o bien, $k^2+k-6=0$. Las raíces de esta ecuación son: $k_1=-3$, $k_2=2$. El sistema fundamental de soluciones correspondiente es:

$$y_1=x^{-3},\qquad y_2=x^2,$$

y la solución general tiene la forma

$$y=C_1x^{-3}+C_2x^2.$$

Integrar las siguentes ecuaciones de Euler;

665. $x^2y''+xy'-y=0.$

666. $x^2y''+3xy'+y=0.$

667. $x^2y''+2xy'+6y=0.$

668. $xy''+y'=0.$

669. $(x+2)^2y''+3(x+2)y'-3y=0.$

670. $(2x+1)^2y''-2(2x+1)y'+4y=0.$

671. $x^2y'''-3xy''+3y'=0.$

672. $x^2y'''=2y'.$

673. $(x+1)^2y'''-12y'=0.$

674. $(2x+1)^2y'''+2(2x+1)y''+y'=0.$

Las ecuaciones no homogéneas de Euler de la forma

$$\sum_{k=0}^{m} a_k x^k y^{(k)} = x^{\alpha} P_m(\ln x),$$

donde $P_m(u)$ es un polinomio de grado m, se pueden resolver también por el método de elección del mismo modo que se resolvían las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de coeficientes constantes cuyos segundos miembros son de la forma

$$e^{\alpha x} P_m(x).$$

Ejemplo. Resolver la ecuación de Euler

$$x^2 y'' - xy' + 2y = x \ln x.$$

Solución. La ecuación característica $k(k-1)-k+2=0$, o bien $k^2-2k+2=0$, tiene las raíces $k_1 = 1-i$, $k_2 = 1+i$. Por consiguiente, la solución general de la ecuación homogénea correspondiente es:

$$y_g = x(C_1 \cos \ln x + C_2 \operatorname{sen} \ln x).$$

Buscamos una solución particular de la forma $y_p = x(A \ln x + B)$. Se tiene,

$$y_p' = A \ln x + B + A, \qquad y_p'' = \frac{A}{x}.$$

Sustituyendo en la ecuación dada, resulta

$$Ax - x(A \ln x + A + B) + 2x(A \ln x + B) = x \ln x,$$

o bien,

$Ax \ln x + Bx = x \ln x$, de donde $A = 1$, $B = 0$. Así, pues,

$$y_p = x \ln x.$$

La solución general es

$$y = x(C_1 \cos \ln x + C_2 \operatorname{sen} \ln x) + x \ln x.$$

Resolver las siguientes ecuaciones no homogéneas de Euler:

675. $x^2 y'' + xy' + y = x(6 - \ln x)$.

676. $x^2 y'' - xy' + y = 2x$.

677. $x^2y'' - xy' - 3y = -\frac{16 \ln x}{x}$.

678. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 2x + 2$.

679. $x^2y'' + xy' - y = x^m$, $|m| \neq 1$.

680. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 2\ln^2 x + 12x$.

5. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE COEFICIENTES VARIABLES

Si se conoce una solución particular $y_1(x)$ de la ecuación

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = 0, \qquad (1)$$

se puede rebajar el orden de esta última en una unidad (sin que deje de ser lineal) haciendo $y = y_1 z$, donde z es una nueva función incógnita, y poniendo después $z' = u$ [se puede hacer directamente la sustitución $u = \left(\frac{y}{y_1}\right)'$].

Conociendo k soluciones particulares de la ecuación (1), linealmente independientes, se puede rebajar el orden de la ecuación en k unidades.

La solución general de la ecuación

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = f(x) \qquad (2)$$

se expresa como una suma de una de sus soluciones particulares y de la solución general de la ecuación homogénea correspondiente (1).

Si se conoce un sistema fundamental de la ecuación homogénea correspondiente (1), la solución general de la ecuación no homogénea (2) se puede hallar mediante cuadraturas por el método de variación de las constantes.

La solución general de la ecuación (1) tiene la forma

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \qquad (3)$$

donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias.

Buscaremos una solución de la ecuación (2) de la forma

$$y = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2 + \ldots + C_n(x)\, y_n, \qquad (4)$$

donde $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ son, por ahora, unas funciones incógnitas de x.

Para determinarlas, obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y_1C_1' + y_2C_2' + \ldots + y_nC_n' = 0 \\ y_1'C_1' + y_2'C_2' + \ldots + y_n'C_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)}C_1' + y_2^{(n-1)}C_2' + \ldots + y_n^{(n-1)}C_n' = f(x) \end{array}\right\}. \qquad (5)$$

Resolviendo este sistema con respecto a $C_i'(x)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, resulta

$$\frac{dC_i}{dx} = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

De aquí hallamos

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)\,dx + \tilde{C}_i \, (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (6)$$

Sustituyendo en (4) $C_i(x)$ por la expresión obtenida, hallamos la solución general de la ecuación (2).

Para la ecuación de segundo orden

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x),$$

el sistema (5) tendrá la forma

$$\left.\begin{array}{l} y_1C_1' + y_2C_2' = 0, \\ y_1'C_1' + y_2'C_2' = f(x) \end{array}\right\}. \qquad (5')$$

Despejando en (5') $C_1' y C_2$, obtenemos

$$C_1' = -\frac{y_2 f(x)}{W[y_1, y_2]}, \qquad C_2' = \frac{y_1 f(x)}{W[y_1, y_2]};$$

de donde hallamos

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W[y_1, y_2]}\,dx + \tilde{C}_1, \; C_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W[y_1, y_2]}\,dx + \tilde{C}_2,$$

donde $\tilde{C}_1$ y $\tilde{C}_2$ son las constantes de integración.

Observación Para la ecuación

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x),$$

donde $a_0(x) \not\equiv 1$, $a_0(x) \neq 0$, el sistema (5') tiene la forma

$$\left.\begin{array}{l} y_1C_1' + y_2C_2' = 0 \\ y_1'C_1' + y_2'C_2' = \frac{f(x)}{a_0(x)} \end{array}\right\}.$$

Ejemplo 1. Hallar la solución general de la ecuación $xy'' + 2y' + xy = 0$, sabiendo que $y_1 = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es una solución particular.

Solución. Hacemos $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot z$, donde z es una nueva función incógnita de x. Se tiene

$$y' = y_1'z + y_1z', \quad y'' = y_1''z + 2y_1'z' + y_1z''.$$

Sustituyendo en la ecuación dada, resulta

$$(xy_1'' + 2y_1' + xy_1)z + xy_1z'' + 2(xy_1' + y_1)z' = 0.$$

Pero, como $y_1 = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es una solución particular de la ecuación dada, se tiene $xy_1'' + 2y_1' + xy_1 = 0$, por lo cual,

$$xy_1z'' + 2(xy_1' + y_1)z' = 0. \qquad (1)$$

Mas, $y_1' = \frac{\cos x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$, y por consiguiente, $xy_1' + y_1 = \cos x$. La ecuación (1) toma la forma

$$z'' \operatorname{sen} x + 2z' \cos x = 0.$$

Escribamos la ecuación en la forma

$$\frac{z''}{z'} + 2\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 0.$$

De aquí, se tiene

$$(\ln|z'| + 2\ln|\operatorname{sen} x|)' = 0,$$

de donde $\ln|z'| + 2\ln|\operatorname{sen} x| = \ln\tilde{C}_1$, o bien, $z' \operatorname{sen}^2 x = \tilde{C}_1$. Integrando esta ecuación, hallamos

$$z = -\tilde{C}_1 \operatorname{ctg} x + C_2,$$

y, por consiguiente, la solución general de la ecuación dada es:

$$y = -\tilde{C}\frac{\cos x}{x} + C_2\frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

o bien,

$$y = C\frac{\cos x}{x} + C_2\frac{\operatorname{sen} x}{x} \qquad (C_1 = -\tilde{C}_1).$$

Ejemplo 2. Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = \frac{1}{x}, \quad (x \neq 0).$$

S o l u c i ó n La solución general de la ecuación homogénea correspondiente tiene la forma (véase el ejemplo 1):

$$y_g = C_1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}.$$

Por consiguiente, el sistema fundamental de soluciones es:

$$y_1 = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad y_2 = \frac{\cos x}{x}.$$

Busquemos la solución general de la ecuación dada por el método de variación de las constantes arbitrarias:

$$y = C_1(x) \frac{\operatorname{sen} x}{x} + C_2(x) \frac{\cos x}{x}.$$

donde $C_1(x)$, $C_2(x)$ son, por ahora, funciones incógnitas de x a determinar. Con este fin, formamos el sigulente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} C_1'(x) \frac{\operatorname{sen} x}{x} + C_2'(x) \frac{\cos x}{x} = 0. \\ C_1'(x) \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} + C_2'(x) \frac{-x \operatorname{sen} x - \cos x}{x^2} = \frac{1}{x} \end{array}\right\}.$$

De aquí hallamos:

$$C_1'(x) = \cos x, \quad C_2'(x) = -\operatorname{sen} x.$$

Integrando, obtenemos:

$$C_1(x) = \operatorname{sen} x + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = \cos x + \tilde{C}_2,$$

y poniéndolos en la expresión de y, resulta la solución general de la ecuación dada:

$$y = \tilde{C}_1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \tilde{C}_2 \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x}.$$

Ejemplo 3. Resolver la ecuación $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

S o l u c i ó n. La ecuación homogénea correspondiente es: $y'' + y = 0$. Su ecuación característica $\lambda^2 + 1 = 0$ tiene las raíces imaginarias $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$ y la solución general de la ecuación homogénea tiene la forma:

$$y_g = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x.$$

Buscamos la solución general de la ecuación inicial en la forma:

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\,\text{sen}\,x, \qquad (1)$$

donde $C_1(x)$ y $C_2(x)$ son funciones incógnitas de x. Para hallarlas, formamos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \cos x \cdot C_1'(x) + \text{sen}\,x \cdot C_2' = 0 \\ -\,\text{sen}\,x \cdot C_1'(x) + \cos x \cdot C_2'(x) = \frac{1}{\cos x} \end{aligned}\right\}.$$

Resolvemos este sistema con respecto a $C_1'(x)$ y $C_2'(x)$:

$$C_1'(x) = -\,\text{tg}\,x; \quad C_2'(x) = 1.$$

Integrando, hallamos:

$$C_1(x) = \ln|\cos x| + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = x + C_2.$$

Poniendo en (1) las expresiones de $C_1(x)$ y $C_2(x)$, obtenemos la solución general de la ecuación dada:

$$y = \tilde{C}_1\cos x + \tilde{C}_2\,\text{sen}\,x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + x\,\text{sen}\,x.$$

Aquí, $\cos x \cdot \ln|\cos x| + x\,\text{sen}\,x$ es una solución particular de la ecuación no homogénea inicial.

Integrar las siguientes ecuaciones (y_1 e y_2 son soluciones particulares de la ecuación homogénea):

681. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0; \quad y_1 = x, \; y_2 = x^2.$

682. $(x^2 - 1)\,y'' = 6y;$ y_1 es un polinomio.

683. $(2x + 1)\,y'' + (4x - 2)\,y' - 8y = 0; \quad y_1 = e^{mx}.$

684. $(x^2 - x)\,y'' + (2x - 3)\,y' - 2y = 0;$ y_1 es una fracción racional en cuyo denominador figuran factores lineales (los divisores del coeficiente de y'').

685. $(3x + 2x^2)\,y'' - 6(1 + x)\,y' + 6y = 6,$ y_1 es un polinomio.

686. $x^2(\ln x - 1)\,y'' - xy' + y = 0, \; y_1 = x.$

687. $y'' + (\text{tg}\,x - 2\,\text{ctg}\,x)\,y' + 2\,\text{ctg}^2 x \cdot y = 0; \; y_1 = \text{sen}\,x.$

688. $y'' + \text{tg}\,x \cdot y' + \cos^2 x \cdot y = 0; \quad y_1 = \cos(\text{sen}\,x).$

689. $(1 + x^2)\,y'' + xy' - y + 1 = 0; \quad y_1 = x.$

690. $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4, \; y_1 = \dfrac{1}{x}.$

691. $(4x^2-x)\,y''+2(2x-1)\,y'-4y=12x^2-6x,\ y_1=\frac{1}{x}$.

692. $y''-y'+ye^{2x}=xe^{2x}-1,\ y_1=\operatorname{sen} e^x$.

693. $y''+y'\operatorname{tg} x=\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$.

694. $(x+1)^3 y''+3(x+1)^2 y'+(x+1)\,y=6\ln(x+1)$.

695. $x(x-1)\,y''-(2x-1)\,y'+2y=x^2(2x-3),\ y_1=x^2$.

696. Una cadena de 6 m de longitud se desliza desde una mesa sin rozamiento. Si el movimiento comienza desde el momento en que cuelga 1 m de la cadena ¿cuánto tiempo tardará en deslizarse toda la cadena?

697. Hallar la ecuación del movimiento de un punto sabiendo que la dependencia de la aceleración del tiempo se expresa por la fórmula $a=1,2t$, si para $t=0$ la distancia $s=0$ y para $t=5$ la distancia $s=20$.

698. Un cuerpo de masa m se desliza sobre un plano horizontal a causa de la acción de un golpe que ha originado una velocidad inicial v_0. Sobre el cuerpo actúa la fuerza del rozamiento igual a $-$ km. Hallar la distancia que es capaz de recorrer el cuerpo.

699. Un punto material de masa $m=1$ se mueve por una recta acercándose a un centro por el cual es repelido con una fuerza igual a k^2x (x es la distancia del punto al centro). Para $t=0$, $x=a$, $\frac{dx}{dt}=ka$. Hallar la ley del movimiento.

Empleando el método de variación de las constantes, ntegrar las siguientes ecuaciones:

700. $y''+4y=\frac{1}{\cos 2x}$.

701. $y''+y=\operatorname{tg}^2 x$.

702. $y''-y=\frac{2e^x}{e^x-1}$.

703. $y''-y'=\frac{1}{e^x+1}$.

704. $y''+y=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}^5 x\cos x}}$.

705. $y''+y=\frac{1}{(\cos 2x)^{3/2}}$

706. $y''' - 2y'' - y' + 2y = \dfrac{2x^3 + x^2 - 4x - 6}{x^4}$.

707. $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{\operatorname{sen}^7 x \cos^3 x}}$.

708. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$.

709. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \operatorname{sen} x}$.

710. $y - y' = e^{2x} \cos e^x$.

711. $y'' + y' = -\dfrac{1}{x}$.

712. $y'' + 3y + 2y = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

713. $y'' + y = \dfrac{1}{x^2}$.

714. $xy'' - (1 + 2x^2)\, y' = 4x^3 e^{x^2}$.

715. $y'' - 2 \operatorname{tg} x \cdot y' = 1$.

716. $x \ln x \cdot y'' - y' = \ln^2 x$.

717. $xy'' + (2x - 1)\, y' = -4x^2$.

718. $(x - 1)\, y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x; \quad y_1 = e^x$.

719. $y'' + y' + e^{-2x} y = e^{-3x}; \quad y_1 = \cos e^{-x}$.

720. $(x^4 - x^3)\, y'' + (2x^3 - 2x^2 - x)\, y' - y = \dfrac{(x-1)^2}{x}; \; y_1 = \dfrac{1}{x}$.

(En los problemas que siguen se indica el sistema fundamental de soluciones y_1, y_2 de la ecuación homogénea correspondiente).

721. $(\cos x - \operatorname{sen} x)\, y'' + 2 \operatorname{sen} x \cdot y' - (\operatorname{sen} x + \cos x)\, y =$
$= e^x (\cos x - \operatorname{sen} x)^2; \quad y_1 = e^x y_2 = \operatorname{sen} x$.

722. $xy'' - y' - 4x^3 y = 16x^3 e^{x^2}; \quad y_1 = e^{x^2},\; y_2 = e^{-x^2}$.

723. $x(1 - x \ln x)\, y'' + (1 + x^2 \ln x)\, y' - (x + 1)\, y =$
$= (1 - x \ln x)^2 e^x; \quad y_1 = e^x,\; y_2 = \ln x$.

724. $4(x^2 + x)\, y'' + 2(2x + 1)\, y' - y = 2\sqrt{x^2 + x}$,
$y|_{x=1} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}, \; y'|_{x=1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \quad y_1 = \sqrt{x}$,
$y_2 = \sqrt{x + 1}$.

725. $\cos^2 x \cdot y'' - \operatorname{sen} x \cos x \cdot y' - y = \operatorname{sen} x$, $y|_{x=0} = y'|_{x=1} = 1$; $y_1 = \sec x$, $y_2 = \operatorname{tg} x$.

726. $\operatorname{sen} x \cdot y'' + 2\cos x \cdot y' - \operatorname{sen} x \cdot y = 2\cos 2x$,

$y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$, $y'|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$; $y_1 = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$, $y_2 = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.

727. $4xy'' + 2y' + y = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$;

$y_1 = \operatorname{sen}\sqrt{x}$, $y_2 = \cos\sqrt{x}$.

728. $4xy'' + 2y' + y = \dfrac{6+x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$.

729. $(1+x^2)\,y'' + 2xy' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \dfrac{\pi^2}{8}$,

$y'|_{x=0} = 0$.

730. $(1-x)\,y'' + xy' - y = (x-1)^2 e^x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 0$,

$y|_{x=0} = 1$; $y_1 = x$, $y_2 = e^x$.

731. $2x^2(2-\ln x)\,y'' + x(4-\ln x)\,y' - y = \dfrac{(2-\ln x)^2}{\sqrt{x}}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$; $y_1 = \ln x$, $y_2 = \sqrt{x}$.

732. $y'' + \dfrac{2}{x}\,y' - y = 4e^x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y = 0$, $y'|_{x=-1} = -\dfrac{1}{e}$;

$y_1 = \dfrac{e^x}{x}$, $y_2 = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

733. $x^3(\ln x - 1)\,y'' - x^2y' + xy = 2\ln x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = 0$

$y_1 = x$, $y_2 = \ln x$.

734. $(y^2 - 2x)\,y'' + (2 - x^2)\,y' - 2(1-x)\,y = 2(x-1)$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = 1$ $y_1 = x^2$, $y_2 = e^x$.

6. COMPOSICION DE LA ECUACION DIFERENCIAL DADO EL SISTEMA FUNDAMENTAL DE SOLUCIONES

Examinemos un sistema de funciones

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x), \qquad (1)$$

linealmente independiente en el segmento $[a, b]$, que tienen derivadas hasta el orden n inclusive.

Entonces, la ecuación

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) & y'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0, \qquad (2)$$

donde $y(x)$ es una función incógnita, es una ecuación diferencial lineal, para la cual las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ forman un sistema fundamental de soluciones. El coeficiente de $y^{(n)}(x)$ en (2) es el wronskiano $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ del sistema (1).

Los puntos en los que se anula este determinante son puntos singulares de la ecuación construida: en estos puntos se anula el coeficiente de la derivada superior $y^{(n)}(x)$.

Ejemplo 1. Formar la ecuación diferencial para la cual las funciones $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ forman un sistema fundamental de soluciones.

S o l u c i ó n. Aplicando la fórmula (2), obtenemos

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & y \\ e^x & -e^{-x} & y' \\ e^x & e^{-x} & y'' \end{vmatrix} = 0, \quad \text{o bien,} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & y' \\ 1 & 1 & y'' \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Desarrollando el determinante del primer miembro de (3) por los elementos de la tercera columna, se tiene:

$$y'' - y = 0.$$

Esta es la ecuación diferencial buscada.

Ejemplo 2. Formar la ecuación diferencial, para la cual, las funciones

$$y_1(x) = e^{x^2}, \qquad y_2(x) = e^{-x^2}$$

forman el sistema fundamental de soluciones.

S o l u c i ó n. Formemos la ecuación (2):

$$\begin{vmatrix} e^{x^2} & e^{-x^2} & y \\ 2xe^{x^2} & -2xe^{-x^2} & y' \\ (2+4x^2)\,e^{x^2} & (4x^2-2)\,e^{-x^2} & y'' \end{vmatrix} = 0,$$

o bien,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ 2x & -2x & y' \\ 2+4x^2 & 4x^2-2 & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando este último determinante por los elementos de la 3ª columna, tendremos:

$$xy'' - y' - 4x^3y = 0. \tag{4}$$

En este ejemplo, el wronskiano $W[y_1, y_2] = -4x$ se anula para $x = 0$ Sin embargo, esto no contradice a la teoría general, según la cual, el wronskiano del sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\,y = 0, \tag{5}$$

cuyos coeficientes son funciones continuas en el segmento $[a, b]$, no se anula en ningún punto x del segmento $[a, b]$.

Escribiendo la ecuación (4) en la forma

$$y'' - \frac{1}{x}\,y' - 4x^2y = 0, \tag{6}$$

observamos que el coeficiente de y' es una función discontinua en el punto $x = 0$, de modo que en este punto ya no se cumple la condición de que los coeficientes de la ecuación (6) sean funciones continuas.

Formar las ecuaciones diferenciales, para las cuales los sistemas dados de funciones forman los sistemas fundamentales de soluciones:

735. $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x,\ y_3(x) = x^2.$

736. $y_1(x) = \operatorname{sh} x,\ y_2(x) = \operatorname{ch} x.$

737. $y_1(x) = x,\ y_2(x) = e^x.$

738. $y_1(x) = \operatorname{sen} x^2,\ y_2(x) = \cos x^2.$

739. $y_1(x) = x,\ y_2(x) = e^{\frac{x^2}{2}}.$

§ 15. METODO DE ISOCLINAS PARA LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

El método de isoclinas (véase el § 2) se emplea también para la resolución de algunas ecuaciones de segundo orden. Tales son las ecuaciones que se pueden reducir a las de primer orden, por ejemplo, las ecuaciones de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(\frac{dx}{dt}, x\right) = 0. \qquad (1)$$

Introduzcamos una nueva variable $v = \frac{dx}{dt}$. Entonces, $\frac{d^2x}{dt^2} = v\frac{dv}{dx}$ y la ecuación (1) toma la forma

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{f(v, x)}{v}. \qquad (2)$$

Esta es una ecuación de primer orden en la que x es la variable independiente. Para su solución se puede aplicar el método de isoclinas.

Interpretaremos la variable x como el desplazamiento de un punto del sistema y $\frac{dx}{dt} = v$ como su velocidad.

El plano de las variables x, v se llama *plano fásico*. Por consiguiente, la ecuación (2) determina la velocidad como función del desplazamiento.

Construyendo el campo de las isoclinas para la ecuación (2) se puede trazar la curva integral una vez dado el punto inicial (x_0, v_0). Esta representación gráfica de la velocidad v como función del desplazamiento x: $v = v(x)$, se llama *cuadro fásico*. Las curvas del plano x, v que representan esta dependencia funcional se denominan *trayectorias fásicas*. Los valores instantáneos de x y v son coordenadas del punto de la trayectoria fásica. Este último se denomina *punto representativo*. Con el tiempo, el punto representativo se desplaza por la trayectoria fásica. Obsérvese que la velocidad positiva suscita con el tiempo un

aumento del desplazamiento. En efecto, en virtud de la susiitución $v = \frac{dx}{dt}$, para $v > 0$, se tiene $\frac{dx}{dt} > 0$, lo cual significa que al aumentar t también aumenta x. Por lo tanto, en la mitad superior del plano fásico, en donde $v > 0$, el punto representativo tiene que moverse de izquierda a derecha, mientras que en la mitad interior del plano, en donde $v < 0$, de derecha a izquierda. Por consiguiente, el movimiento por la trayectoria fásica se efectúa en dirección de las agujas del reloj.

Ejemplo 1. Construir la trayectoria en el plano fásico para la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0. \tag{3}$$

Solución. Hacemos $\frac{dx}{dt} = v$. La ecuación (3) toma la forma

$$v\frac{dv}{dx} + x = 0, \text{ o bien, } \frac{dv}{dx} = -\frac{x}{v}. \tag{4}$$

Las ecuaciones de las isoclinas para (4), son:

$$-\frac{x}{v} = k.$$

Trazando las isoclinas, correspondientes a distintos valores de k, hallamos que las trayectorias fásicas son circunferencias con centro en el punto (0, 0) (fig. 22).

Obsérvese, que las trayectorias fásicas cerradas corresponden a los movimientos periódicos. Fácilmente se observa que, en el caso de la ecuación (3), verdaderamente resulta un movimiento periódico. Resolviendo (3) por los métodos expuestos anteriormente, hallamos:

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t.$$

Ejemplo 2. Trazar las trayectorias fásicas para la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + x = 0. \tag{5}$$

Solución Hacemos $v = \frac{dx}{dt}$. Entonces, la ecuación (5) toma la forma

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v - x}{v}. \tag{6}$$

La ecuación de las isoclinas es: $\frac{v - x}{v} = k$. Las trayectorias fásicas tienen la forma de espirales que se desenrollan (fig. 23). En el cuadro fásico se puede observar que el movimiento es aperiódico, con una amplitud que crece indefinidamente con el tiempo.

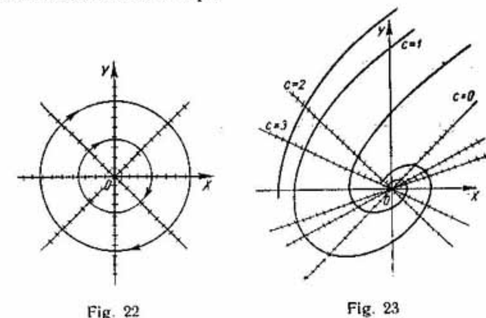


Fig. 22 Fig. 23

Trazar las trayectorias fásicas para las siguientes ecuaciones diferenciales:

740. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0.$

741. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 6x = 0.$

742. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 0.$

743. $\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x = 0.$

744. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dx}{dt} - 2x = 0.$

745. $\frac{d^2x}{dt^2} - x \cdot \exp\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$ $(\exp u \equiv e^u)$.

746. $\frac{d^2x}{dt^2} + \exp\left(-\frac{dx}{dt}\right) - x = 0.$

747. $\frac{d^2x}{dt^2} + x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0.$

748. $\frac{d^2x}{dt^2}+(x+2)\frac{dx}{dt}=0.$

749. $\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}+x-x^2=0.$

§ 16. PROBLEMAS DE CONTORNO

Para mayor simplicidad estudiaremos la ecuación de segundo orden

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0. \quad (1)$$

Se supondrá que los coeficientes $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son funciones continuas en cierto intervalo (a, b). En este caso, toda solución $y(x)$ de la ecuación (1) quedará determinada en todo este intervalo. A continuación, en lugar de la ecuación (1) consideraremos la ecuación

$$[p(x)y']'-q(x)y=0, \qquad p(x)>0. \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) pueden transformarse una en la otra.

La solución de la ecuación diferencial (2) se determina completamente por las condiciones iniciales

$$y(x_0)=y_0, \qquad y'(x_0)=y_0'.$$

Sin embargo, en muchos problemas de física se suelen buscar soluciones dadas de otro modo. Por ejemplo, se puede plantear el problema: hallar una solución de la ecuación (2) que tome en los puntos a y b unos valores dados $y(a)$ e $y(b)$. Generalmente, en tales casos, interesan solamente los valores de la solución para los valores de x de (a, b). Como los valores $y(a)$ e $y(b)$ se dan en los extremos del intervalo, los problemas de este género se denominan problemas de contorno. A continuación se tomará como básico el intervalo $(0, \pi)$ (intervalo fundamental), con lo cual no quedará restringida la generalidad de los razonamientos.

Una forma bastante general de condiciones de contorno para la ecuación de segundo orden es la siguiente:

$$\begin{aligned} h_0 y(0) + h_1 y'(0) &= A, \\ k_0 y(\pi) + k_1 y'(\pi) &= B, \end{aligned} \tag{3}$$

donde h_0, h_1, k_0, k_1, A, B son unas constantes dadas y h_0, h_1, k_0, k_1 no son simultáneamente iguales a cero.

Si $A = B = 0$, las condiciones de contorno se llaman homogéneas Por ejemplo,

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ y(0) = y(\pi) = 0. \\ 2)\ h_0 y(0) = y'(0),\ y'(\pi) = -h_1 y(\pi);\quad h_0,\ h_1 > 0. \\ 3)\ y'(0) = y'(\pi) = 0. \\ 4)\ y(0) = y(\pi),\ y'(0) = y'(\pi). \end{array}\right\}. \tag{3'}$$

Por lo general, los problemas de contorno no siempre tienen solución, es decir, no siempre existe una solución tal que en los extremos del intervalo tome los valores indicados. Por ejemplo, el problema de contorno

$$y'' = 0,\quad y(0) - y(\pi) = 1,\quad y'(0) + y'(\pi) = 0$$

no tiene solución alguna.

El problema

$$y'' + \lambda y = 0,\quad y(0) = y(\pi) = 0 \tag{4}$$

tiene solución no nula solamente para valores enteros de $\sqrt{\lambda}$. En efecto, de la solución general de la ecuación diferencial (4)

$$y = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$$

se deduce que pueden cumplirse las condiciones de contorno cuando, y sólo cuando, $\lambda = n^2$ es el cuadrado de un número entero n. Las soluciones correspondientes son las funciones $y_n = \operatorname{sen} nx$.

Como se observa en este ejemplo, si en la ecuación (2), q es función del parámetro λ, en ciertas condiciones, existen tales valores del parámetro para los que el problema de contorno homogéneo para la ecuación (2) tiene solución no nula. Estos valores de λ se llaman valores propios (o autovalores) y las soluciones correspondientes del problema de contorno, funciones propias (o autofunciones).

Estas últimas se determinan salvo un factor constante arbitrario. Así, pues, para el problema de contorno $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$, los números 1^2, 2^2, 3^3, ... y las funciones $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} 2x$, ... son los valores propios y las funciones propias, respectivamente, del problema.

Junto con los valores propios *simples*, cuando a un valor propio corresponde una sola función propia (salvo un factor constante), pueden existir valores *propios* múltiples, cuando a un valor propio λ_0 le corresponden dos funciones propias linealmente independientes.

Para resolver los problemas de contorno (en el caso de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas) se procede del siguiente modo: se halla la solución general de la ecuación diferencial dada:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

donde $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ son soluciones linealmente independientes. Después se exige que esta solución $y(x)$ satisfaga a las condiciones de contorno dadas. Esto da lugar a un sistema lineal de ecuaciones para la determinación de C_1, C_2, ..., C_n. Resolviendo este sistema, en caso de que esto sea posible, se halla la solución del problema de contorno planteado.

En este caso, si surge el problema de la determinación de los valores propios, la condición de existencia de solución no nula del sistema, por el que se determinan C_1, C_2, ..., C_n, es la condición que determina los valores propios. Generalmente, esta ecuación en λ es trascendente.

750. ¿Para qué valores de λ la ecuación $y'' + \lambda y = 0$ tiene solución no nula que satisfaga a las condiciones:

a) $y'(0) = y'(\pi) = 0$,

b) $y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$?.

751. ¿Para qué valores de λ el problema de contorno

$$y'' + \lambda y = 0,$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

posee la solución trivial $y \equiv 0$?

752. ¿Cuál de los problemas que siguen tiene solución?

a) $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 1$,

b) $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 1$.

753. Resolver el problema de contorno

$$y'' + (\lambda - \omega^2)\, y = 0, \quad y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1).$$

Considerar los casos $\lambda - \omega^2 > 0$, $\lambda - \omega^2 = 0$, $\lambda - \omega^2 < 0$.

754. Hallar la solución de la ecuación $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$ que pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, 2)$.

Resolver los siguientes problemas de contorno:

755. $y''(x) = k^2 y(x)$, donde $k^2 = \alpha^2 s^2$, $y(0) = v_1$, $y(x_0) = v_2$.

756. $y''(x) = \alpha^2 \cdot s \cdot y(x)$, $y(0) = v$, $y'(x_0) = 0$.

757. $y''(x) - \alpha^2 s y(x) = 0$,

a) $y(0) = \frac{1}{s}$, $\quad y'(x_0) = 0$,

b) $y'(0) = -\frac{1}{s}$, $\quad y(x_0) = 0$.

758. $y''(x) = \alpha^2 s^2 y(x) + \alpha^2 g l$, $\quad y(0) = y(x_0)$.

759. $y''(x) = \lambda^2 y(x)$ $\quad (\lambda \neq 0)$

a) $y(0) = 0$, $\quad y(1) = \frac{1}{\lambda}$,

b) $y'(0) = 0$, $\quad y(1) = \frac{1}{\lambda}$,

c) $y(0) = 0$, $\quad y'(1) = \frac{1}{\lambda}$,

d) $y'(0) = 0$, $\quad y'(1) = \frac{1}{\lambda}$.

760. $y^{IV} - \lambda^4 y = 0$, $y(0) = y''(0) = 0$, $y(\pi) = y''(\pi) = 0$.

761. $y^{IV} - \lambda^4 y = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y(\pi) = y''(\pi) = 0$.

762. $y^{IV} - \lambda^4 y = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y(\pi) = y'(\pi) = 0$.

763. $y''' + \alpha y'' - \alpha^2 y' - \alpha^3 y = 0$, $\quad y(0) = -\frac{1}{\alpha}$,

$y'(0) = 1 + \frac{1}{\alpha}$, $\quad y(1) = 0$.

764. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = \cos 2x$,

$y(0) = y(\pi) = \frac{1}{25}$, $\quad y'(0) = \frac{2}{15}$, $\quad y'(\pi) = \frac{2}{25}$.

N o t a. Los valores propios de los problemas estudiados anteriormente forman una sucesión numérica cre-

ciente. Si los coeficientes de la ecuación diferencial tienen un punto singular en la frontera del dominio fundamental o si el dominio fundamental es infinito, por ejemplo, todo el eje numérico, el espectro, o sea, el conjunto de los valores propios puede tener otra estructura. En particular, puede haber espectros que contengan todos los números de algún intervalo de valores λ, denominados espectros continuos. Por ejemplo, supongamos que se necesita resolver la ecuación $y'' + \lambda y = 0$ para el intervalo $-\infty < x < +\infty$ con las "condiciones de contorno": $y(x)$ tiene que estar acotada en el infinito. Está claro que, en este caso, cualquier número λ no negativo es un valor propio al cual le corresponden las funciones propias $\operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, x$ y $\cos \sqrt{\lambda}\, y$.

Al resolver los problemas de la física matemática que dan lugar a problemas de determinación de los valores propios, frecuentemente resultan ecuaciones diferenciales de la forma

$$[p(x)\, y']' - q(x)\, y + \lambda \rho(x)\, y = 0 \tag{4}$$

tales que en puntos finitos del dominio fundamental puede haber singularidades de la ecuación diferencial; por ejemplo: se anula el coeficiente $p(x)$. Para estos puntos singulares, las condiciones a satisfacer aparecen del carácter mismo del problema; por ejemplo: que la solución sea continua o acotada, o bien que sea infinita pero de orden no superior a un orden prefijado. Estas condiciones desempeñan el papel de condiciones de contorno. Un ejemplo típico es la *ecuación de Bessel*

$$(xy')' - \frac{n^2}{x} y + \lambda x y = 0, \tag{5}$$

que aparece en los problemas de la física matemática. En este caso, $p(x) \equiv x$ y ya no se cumple la suposición hecha anteriormente de que sea $p(x) > 0$ en todo el dominio fundamental $0 \leqslant x \leqslant 1$, puesto que $p(0) = 0$. Para la ecuación de Bessel, $x = 0$ es un punto singular.

La exigencia de que la solución sea acotada en este punto es para la ecuación de Bessel una condición especial de contorno que, por ejemplo, puede expresarse así: hallar la solución de la ecuación (5) que está acotada para $x = 0$ y que se anula para $x = 1$,

Resolver los problemas de contorno:

765. $xy'' + y' = 0$, $y(1) = \alpha y'(1)$, $y(x)$ está acotada para $x \to 0$.

766. $x^2 y^{IV} + 4xy''' + 2y'' = 0$, $y(1) = y'(1) = 0$, $y(x)$ está acotada para $x \to 0$.

767. $x^3 y^{IV} + 6x^2 y''' + 6xy'' = 0$, $y(1) = y'(1) = 0$, $y(x)$ está acotada para $x \to 0$.

§ 17. INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE SERIES

1. Este método resulta muy usual al aplicarlo a las ecuaciones diferenciales lineales. Aquí lo aplicaremos para el caso de ecuaciones de segundo orden.

Sea dada una ecuación diferencial de segundo orden:

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0. \qquad (1)$$

Supongamos que los coeficientes $p(x)$ y $q(x)$ se expresan en forma de series, dispuestas según las potencias enteras positivas de x, de modo que la ecuación (1) se puede escribir de la forma

$$y'' + (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)\,y' + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots)\,y = 0. \qquad (2)$$

Busquemos la solución de esta ecuación en forma de una serie de potencias

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \qquad (3)$$

Poniendo en (2) la expresión de y y sus derivadas, obtenemos:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0. \qquad (4)$$

Multiplicando las series de potencias, reuniendo los términos semejantes e igualando a cero los coeficientes en distintas potencias de x del primer miembro de (4), resultan las ecuaciones:

$$\begin{array}{l|l} x^0 & 2\cdot 1\, c_2 + a_0 c_1 + b_0 c_0 = 0 \\ x^1 & 3\cdot 2\, c_3 + 2a_0 c_2 + a_1 c_1 + b_0 c_1 + b_1 c_0 = 0 \\ x^2 & 4\cdot 3\, c_4 + 3a_0 c_3 + 2a_1 c_2 + a_2 c_1 + b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 = 0 \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots \end{array} \qquad (5)$$

Cada una de las ecuaciones (5) contiene un coeficiente indeterminado más que la anterior. Los coeficientes c_0 y c_1 se mantienen arbitrarios y desempeñan el papel de constantes arbitrarias.

La primera de las ecuaciones (5) proporciona c_2; la segunda, c_3; la tercera, c_4; etc. En general, de la $(k+ +1)$-ésima ecuación se puede determinar c_{k+2} una vez conocidos $c_0, c_1, \ldots, c_{k+1}$.

En la práctica es conveniente proceder del modo siguiente: Por el esquema señalado se buscan dos soluciones: $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Para $y_1(x)$ se toma $c_0 = 1$ y $c_1 = 0$, y para $y_2(x)$ se toma $c_0 = 0$ y $c_1 = 1$, lo cual es equivalente a las siguientes condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{ll} y_1(0) = 1, & y_1'(0) = 0, \\ y_2(0) = 0, & y_2'(0) = 1 \end{array}\right\}. \qquad (6)$$

Toda solución de la ecuación (1) será combinación lineal de las soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

Si las condiciones iniciales son de la forma $y(0) = A$, $y'(0) = B$, entonces, es evidente que

$$y = Ay_1(x) + By_2(x).$$

Finalmente, enunciaremos (sin exponer la demostración) el teorema de existencia de solución de la ecuación (1) en forma de serie (3).

Teorema. Si las series

$$p(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{y} \quad q(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

son convergentes para $|x|< R$, la serie de potencias (3) construida del modo indicado anteriormente también es convergente para estos mismos valores de x y es solución de la ecuacion (1).

En particular, si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios en x, la serie (3) será convergente para cualquier valor de x.

Ejemplo. Hallar la solución de la ecuación

$$y''-xy'-2y=0 \tag{1}$$

en forma de serie de potencias.

Solución. Buscamos $y_1(x)$ en la forma

$$y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \tag{2}$$

Entonces,

$$y_1'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1}, \tag{3}$$

$$y_1''(x)=\sum_{k=2}^{\infty} (k-1)kc_k x^{k-2}. \tag{4}$$

Poniendo (2), (3) y (4) en (1), hallamos:

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k-1)kc_k x^{k-2}-\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^k-2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k=0. \tag{5}$$

Reduciendo los términos semejantes e igualando a cero los coeficientes en distintas potencias de x, resultan unas relaciones de las cuales se hallan los coeficientes c_2, c_3, c_4, ...

Para precisar, hagamos

$$y_1(0)=1, \quad y_1'(0)=0. \tag{6}$$

Entonces, de (2) y (6)

$$c_0=1, \tag{7}$$

y de (3) y (6)

$$c_1 = 0. \tag{8}$$

Así, pues, se tiene

x_0 | $2c_2 - 2c_0 = 0$, de donde, en virtud de (7), $c_1 = 1$,

x^1 | $3 \cdot 2c_3 - 1 \cdot c_1 - 2c_1 = 0$ de donde, en virtud de (8), $c_3 = 0$,

x^2 | $4 \cdot 3c_4 - 2c_2 - 2c_2 = 0$, de donde $c_4 = \frac{1}{3}$,

x^3 | $5 \cdot 4c_5 - 3c_3 - 2c_3 = 0$, de donde $c_5 = 0$,

x^4 | $6 \cdot 5c_6 - 4c_4 - 2c_4 = 0$, de donde $c_6 = \frac{c_4}{5} = \frac{1}{3 \cdot 5}$

. . . .

y, por consiguiente,

$$y_1(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{15}x^6 + \ldots \tag{9}$$

De modo análogo, tomando

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k \tag{10}$$

y las condiciones iniciales

$$y_2(0) = 0, \qquad y_2'(0) = 1, \tag{11}$$

resulta

$$A_0 = 0, \qquad A_1 = 1, \tag{12}$$

y poniendo (10) en (1), hallamos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) A_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) A_k x^k = 0$$

x^0 | $2A_2 = 0$, $A_2 = 0$

x^1 | $3 \cdot 2A_3 - 3A_1 = 0$, $A_3 = \frac{1}{2}$,

x^2 | $4 \cdot 3A_4 - 4A_2 = 0$, $A_4 = 0$.

x^3 | $5 \cdot 4A_5 - 5A_3 = 0$, $A_5 = \frac{1}{2 \cdot 4}$,

x^4 | $6 \cdot 5A_6 - 6A_4 = 0$, $A_6 = 0$,

x^5 | $7 \cdot 6A_7 - 7A_5 = 0$, $A_7 = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}$,

. . . .

Es evidente que

$$A_{2k}=0, \quad A_{2k+1}=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2k)} \quad (k=1,\,2,\,3,\,\ldots).$$

Así, pues,

$$y_2(x)=x+\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}+\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots$$

$$\ldots=x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^k}{k!}=xe^{\frac{x^2}{2}}. \tag{13}$$

La solución general de la ecuación (1) tendrá la forma

$$y(x)=Ay_1(x)+By_2(x),$$

donde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ se determinan por las fórmulas (9) y (13), respectivamente.

2. *Desarrollo de la solución en una serie de potencias generalizada.*

Definición. Una serie de la forma

$$x^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \quad (c_0\neq 0), \tag{14}$$

donde ρ es un número dado y la serie de potencias $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ es convergente en cierto recinto $|x|<R$, se llama serie de potencias generalizada.

Si ρ es un número entero no negativo, la serie de potencias generalizada (14) se convierte en una serie de potencias ordinaria.

Subsiste el siguiente teorema.

Teorema. *Si $x=0$ es un punto singular de la ecuación (1), cuyos coeficientes $p(x)$ y $q(x)$ admiten los desarrollos*

$$p(x)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k}{x}, \qquad q(x)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k}{x^2}, \tag{15}$$

donde las series que figuran en los numeradores son convergentes en cierto recinto $|x|<R$, y los coeficientes a_0, b_0 y b_1 no son simultáneamente iguales a cero, entonces la ecuación (1) posee al menos una solución en forma de

serie de potencias generalizada

$$y = x^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k \qquad (C_0 \neq 0), \tag{16}$$

que es convergente al menos en el mismo recinto $|x| < R$.

Para hallar el exponente ρ y los coeficientes c_k es necesario poner la serie (16) en la ecuación (1), simplificar por x^{ρ} e igualar a cero los coeficientes en distintas potencias de x (método de los coeficientes indeterminados).

En este caso, el número ρ se halla de la *ecuación* llamada *determinativa*

$$\rho(\rho - 1) + a_0\rho + b_0 = 0, \tag{17}$$

donde

$$a_0 = \lim_{x \to 0} xp(x), \qquad b_0 = \lim_{x \to 0} x^2 q(x). \tag{18}$$

Supongamos que ρ_1 y ρ_2 son las raíces de la ecuación determinativa (17). Distinguiremos tres casos:

1. Si la diferencia $\rho_1 - \rho_2$ no es un número entero o cero, se pueden construir dos soluciones de la forma (16):

$$y_1 = x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \qquad (c_0 \neq 0),$$

$$y_2 = x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k \quad (A_0 \neq 0).$$

2 Si la diferencia $\rho_1 - \rho_2$ es un número entero positivo, por lo general, solamente se puede construir una serie (solución de la ecuación (1)):

$$y_1 = x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \tag{19}$$

3. Si la ecuación (17) posee una raíz múltiple $\rho_1 = \rho_2$, también se puede construir solamente una serie (la solución (19)).

Está claro que en el primer caso las soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ construidas son linealmente independientes (o sea, la razón de las mismas no es constante).

En el segundo y tercer casos, se ha construido solamente una solución (19) Señalemos, sin exponer la demostración, que si la diferencia $\rho_1 - \rho_2$ es un número en-

tero positivo o cero, además de la solución (19) habrá una solución de la forma

$$y_2 = Ay_1(x)\ln x + x^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k. \qquad (20)$$

Vemos, pues, que ahora $y_2(x)$ contiene un sumando complementario de la forma

$$Ay_1(x)\ln x,$$

donde $y_1(x)$ se expresa en la forma (19).

Observación. Puede ocurrir que la constante A en (20) sea igual a cero, y entonces, para y_2 resulta una expresión en forma de una serie de potencias generalizada.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación

$$2x^2y'' + (3x - 2x^2)y' - (x+1)y = 0. \qquad (1)$$

Solución Escribamos (1) en la forma

$$y'' + \frac{3x - 2x^2}{2x^2}y' - \frac{x+1}{2x^2}y = 0 \qquad (2)$$

o bien

$$y'' + \frac{3-2x}{2x}y' - \frac{x+1}{2x^2}y = 0. \qquad (3)$$

Busquemos la solución $y(x)$ en la forma

$$y(x) = x^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k \qquad (C_0 \neq 0). \qquad (4)$$

Para hallar ρ escribimos la ecuación determinativa

$$\rho(\rho-1) + a_0\rho + b_0 = 0, \qquad (5)$$

donde

$$a_0 = \lim_{x\to 0}\frac{3-2x}{2} = \frac{3}{2}, \quad b = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x+1}{2}\right) = -\frac{1}{2},$$

o sea,

$$\rho(\rho-1) + \frac{3}{2}\rho - \frac{1}{2} = 0.$$

o bien,

$$\rho^2 + \frac{1}{2}\rho - \frac{1}{2} = 0.$$

De aquí,

$$\rho_1 = \frac{1}{2}, \quad \rho_2 = -1.$$

De acuerdo a la regla expuesta tomamos

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k, \qquad (x > 0), \tag{6}$$

$$y_2(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k.$$

Para hallar los coeficientes $C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots$ sustituimos $y_1(x)$ y sus derivadas $y_1'(x)$ e $y_1''(x)$ en la ecuación (1). Se tiene

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+\frac{1}{2}}, \quad y_1'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) C_k x^{k-\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

$$y_1''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{1}{2}\right) C_k x^{k-\frac{3}{2}},$$

$$2x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(k^2 - \frac{1}{4}\right) C_k x^{k-\frac{3}{2}} + (3x - 2x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) C_k x^{k-\frac{1}{2}} -$$

$$- (x+1) \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+\frac{1}{2}} = 0. \tag{8}$$

Después de las transformaciones, (8) toma la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(2k+3) C_k x^{k+\frac{1}{2}} - \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+1) C_k x^{k+\frac{3}{2}} = 0. \tag{9}$$

Como se busca una solución para $x > 0$, se puede simplificar por $x^{\frac{1}{2}}$ y obtenemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(2k+3) C_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+1) C_k x^{k+1} = 0. \tag{10}$$

De aquí, hallamos las relaciones para la determinación de los coeficientes:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^1 & 1\cdot 5C_1 - 2\cdot 1C_0 = 0 \\ x^2 & 2\cdot 7C_2 - 2\cdot 2C_1 = 0 \\ x^3 & 3\cdot 9C_2 - 2\cdot 3C_2 = 0 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x^n & n(2n+3)C_n - 2nC_{n-1} = 0 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\}. \qquad (11)$$

Haciendo en la primera ecuación de las relaciones (11) $C_0 = 1$, obtenemos, $C_1 = \frac{2}{5}$.

De la segunda ecuación se tiene $C_2 = \frac{2^2}{5\cdot 7}$.

De la tercera ecuación, $C_3 = \frac{2^3}{5\cdot 7\cdot 9}$, etc.

Fácilmente se observa que

$$C_n = \frac{2^n}{5\cdot 7\cdot 9\ \ldots\ (2n+3)} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

De este modo,

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}}\left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{5\cdot 7\cdot 9\ \ldots\ (2k+3)}\right]. \qquad (12)$$

De modo análogo se hallan también los coeficientes A_k. Resulta que para $A_0 = 1$,

$$A_1 = 1, \quad A_2 = \frac{1}{2!}, \quad \ldots, \quad A_k = \frac{1}{k!},$$

de modo que

$$y_2(x) = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{o bien} \quad y_2(x) = \frac{e^x}{x}. \qquad (13)$$

La solución general de la ecuación (1) es:

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x),$$

donde A y B son constantes arbitrarias y las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ están dadas por las fórmulas (12) y (13).

Ejemplo 2. La ecuación de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)\,y = 0, \tag{1}$$

donde p es una constante dada, $p > 0$.

S o l u c i ó n. Escribamos (1) en la forma

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - p^2}{x^2}\,y = 0. \tag{2}$$

Aquí, $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = \frac{x^2 - p^2}{x^2}$ (véanse las fórmulas (15)), de modo que

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \lim_{x\to 0} xp(x) = 1 \\ b_0 &= \lim_{x\to 0} x^2q(x) = -p^2 \end{aligned}\right\} \text{(véanse las fórmulas (18)).}$$

La ecuación determinativa para ρ es:

$$\rho(\rho - 1) + 1\cdot\rho - p^2 = 0, \quad \text{bien,} \quad \rho^2 - p^2 = 0 \tag{3}$$

Las raíces de la ecuación (3) son:

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 &= p \\ \rho_2 &= -p \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Buscamos la primera solución particular de la ecuación de Bessel (1) en forma de una serie de potencias generalizada:

$$y = x^p \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k. \tag{5}$$

Reemplazando y, y' e y'' en la ecuación (1), resulta

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} C_k (k + p)(k + p - 1)\, x^{k+p-2} + x \sum_{k=0}^{\infty} C_k (k+p)\, x^{k+p-1} + $$

$$+ (x^2 - p^2) \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+p} = 0,$$

o bien, después de transformaciones elementales y simplificación por x^p:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k + p)^2 - p^2]\, C_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+2} = 0. \tag{6}$$

De aquí, igualando a cero los coeficientes en distintas potencias de x, se tiene.

$$\left.\begin{array}{l|l} x^0 & (p^2 - p^2)\,C_0 = 0, \\ x^1 & [(1+p)^2 - p^2]\,C_1 = 0, \\ x^2 & [(2+p)^2 - p^2]\,C_2 + C_0 = 0, \\ x^3 & [(3+p)^2 - p^2]\,C_3 + C_1 = 0, \\ x^4 & [(4+p)^2 - p^2]\,C_4 + C_2 = 0, \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ x^k & [(k+p)^2 - p^2]\,C_k + C_{k-2} = 0, \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (7)$$

La primera de las relaciones (7) se cumple para cualquier valor del coeficiente C_0.

De la segunda relación (7) obtenemos: $C_1 = 0$.

De la tercera:

$$C_2 = -\frac{C_0}{(2+p)^2 - p^2} = -\frac{C_0}{2^2\,(1+p)}.$$

De la cuarta: $C_3 = 0$.

De la quinta:

$$C_4 = -\frac{C_2}{(4+p)^2 - p^2} = \frac{C_0}{2^4\,(1+p)\,(2+p)\cdot 1\cdot 2}.$$

Es evidente que todos los coeficientes de subindice impar son iguales a cero:

$$C_{2k+1} = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (8)$$

Los coeficientes de subindice par son de la forma:

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k\, C^0}{2^{2k}\,(p+1)\,(p+2)\,\ldots\,(p+k)\cdot k!} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (9)$$

Para simplificar los cálculos ulteriores, hagamos

$$C_0 = \frac{1}{2^p\,\Gamma(\nu)\,(p+1)}. \qquad (10)$$

donde $\Gamma(\nu)$ es la función Gamma de Euler.

La función Gamma de Euler $\Gamma(\nu)$ se define para todos los valores positivos (y también para todos los valores

complejos cuyas partes reales sean positivas) del modo siguiente:

$$\Gamma(\nu)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\nu-1}\,dx. \tag{11}$$

La función Gamma posee las siguientes propiedades importantes:

1. $\Gamma(\nu+1)=\nu\Gamma(\nu).$
2. $\Gamma(1)=1.$

Si k es un número entero positivo, se tiene:

3. $\Gamma(\nu+k+1)=(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)\Gamma(\nu+1)$
4. $\Gamma(k+1)=k!$

Aplicando (10) y las propiedades de la función Γ ocupémonos de la transformación del coeficiente C_{2k}:

$$C_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}(p+1)(p+2)\ldots(p+k)\cdot k!\cdot 2^p\Gamma(p+1)}=$$

$$=\frac{(-1)^k}{2^{2k+p}\cdot k!\,\Gamma(p+k+1)}$$

pues, en virtud de la propiedad 3, $(p+1)(p+2)\ldots$ $\ldots(p+k)\Gamma(p+1)$ es igual a $\Gamma(p+k+1)$. Ahora, la solución particular de la ecuación de Bessel, que a continuación indicaremos con J_p, toma la forma

$$J_p(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(p+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}. \tag{12}$$

Esta función se llama *función de Bessel de primera especie de orden p.*

La segunda solución particular de la ecuación de Bessel (1) la buscaremos de la forma

$$y=x^{-p}\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k, \tag{13}$$

donde $-p$ es la segunda raíz de la ecuación determinativa (3). Está claro que esta solución puede obtenerse de la solución (12) sustituyendo p por $-p$, puesto que en la

ecuación (1) p está elevado a una potencia par y no varía al sustituir p por $-p$.

Así, pues,

$$J_{-p}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1-p)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}. \qquad (14)$$

Esta función se llama función de Bessel de primera especie de orden $-p$.

Si *p no es un número entero*, las soluciones $J_p(x)$ y $J_{-p}(x)$ son linealmente independientes, puesto que sus desarrollos en series comienzan con potencias distintas de x y, por consiguiente, la combinación lineal $\alpha_1 J_p(x)+\alpha_2 J_{-p}(x)$ puede ser igual a cero idénticamente sólo para $\alpha_1=\alpha_2=0$.

Si p es un *número entero*, las funciones $J_p(x)$ y $J_{-p}(x)$ son linealmente dependientes, pues

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x) \quad (n \text{ es entero}). \qquad (15)$$

Así, pues, cuando p es entero, en lugar de $J_{-p}(x)$ hay que buscar otra solución que sea linealmente independiente con $J_p(x)$. Para esto, introducimos una nueva función

$$Y_p(x)=\frac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen} p\pi}, \qquad (16)$$

suponiendo primero que p no es entero.

Es evidente que la función $Y_p(x)$, determinada de este modo, es solución de la ecuación (1) (puesto que representa una combinación lineal de las soluciones particulares $J_p(x)$ y $J_{-p}(x)$).

Pasando a límites en (16), cuando p tiende a un *número entero*, se obtiene la solución particular $Y_p(x)$ linealmente independiente con $J_p(x)$ y determinada ya para valores enteros de p.

La función $Y_p(x)$ definida aquí se llama *función de Bessel de segunda especie de orden p*, o también función de *Weber* *). De este modo, para todo p, entero o fraccionario, hemos construido el *sistema fundamental de soluciones* de la ecuación de Bessel (1). De aquí se deduce

*) Algunos autores la llaman función de Neumann y la indican $N_p(x)$. (*Nota del T.*)

que la solución general de la ecuación (1) puede representarse en la forma

$$y = AJ_p(x) + BY_p(x), \tag{17}$$

donde A y B son constantes arbitrarias.

No obstante, cuando p no es entero, la solución general de la ecuación de Bessel se puede tomar de la forma

$$y = \alpha_1 J_p(x) + \alpha_2 J_{-p}(x), \tag{18}$$

donde α_1 y α_2 son constantes arbitrarias.

Nota 1. La ecuación que frecuentemente aparece

$$x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - p^2)\,y = 0, \tag{19}$$

donde k es cierta constante ($k \neq 0$), se reduce a la ecuación de Bessel

$$\xi^2\frac{d^2y}{d\xi^2} + \xi\frac{dy}{d\xi} + (\xi^2 - p^2)\,y = 0 \tag{20}$$

mediante la sustitución $\xi = kx$.

La solución general de la ecuación (20) (cuando p no es entero) es:

$$y = \alpha_1 J_p(\xi) + \alpha_2 J_{-p}(\xi),$$

y entonces, la solución general de la ecuación (19) toma la forma:

$$y = \alpha_1 J_p(kx) + \alpha_2 J_{-p}(kx),$$

Cuando p es entero,

$$y = \alpha_1 J_p(kx) + \alpha_2 Y_p(kx).$$

Nota 2. Una clase muy amplia de ecuaciones de la forma

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + (b + cx^m)\,y = 0, \tag{21}$$

donde a, b, c, m son constantes ($c > 0$, $m \neq 0$), introduciendo una nueva variable t y una nueva función u según las fórmulas

$$y = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}}u, \quad x = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \tag{22}$$

se reducen a la ecuación de Bessel

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2}+t\frac{du}{dt}+(t^2-p^2)u=0,$$

donde

$$\alpha=\frac{a-1}{2},\quad \beta=\frac{m}{2},\quad \gamma=\frac{2\sqrt{c}}{m},\quad p^2=\frac{(a-1)^2-4b}{m^2}. \quad (23)$$

Cuando $c=0$ y cuando $m=0$, la ecuación (21) es la ecuación de Euler.

Integrar mediante series las siguientes ecuaciones diferenciales:

768. $y'-2xy=0,\quad y(0)=1.$

769. $4xy''+2y'+y=0.$

770. $(1+x)y'-ny=0.$

771. $9x(1-x)y''-12y'+4y=0.$

772. $y''+xy'+y=0.$

773. $y''-xy'+y-1=0,\quad y(0)=y'(0)=0.$

En los ejercicios **774—778** hay que hallar seis términos del desarrollo de $y(x)$.

774. $y''-(1+x^2)y=0,\quad y(0)=-2,\quad y'(0)=2.$

775. $y''=x^2y-y',\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0.$

776. $y''-ye^x=0.$

777. $y'=x^2+y^2,\quad y(0)=0.$

778. $y'=e^y+xy,\quad y(0)=0$

Hallar las soluciones generales de las ecuaciones de Bessel:

779. $x^2y''+xy'+\left(4x^2-\frac{1}{9}\right)y=0.$

780. $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0.$

781. $y''+\frac{1}{x}y'+\frac{1}{9}y=0.$

782. $y''+\frac{1}{x}y'+4y=0.$

783. $x^2y''-2xy'+4(x^4-1)y=0.$

784. $xy'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}y = 0.$

785. $y'' + \frac{5}{x}y' + y = 0.$

786. $y'' + \frac{3}{x}y' + 4y = 0.$

Demostrar la justeza de las siguientes relaciones:

787. $J'_p(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x}J_p(x).$

788. $J'_p(x) = -J_{p+1}(x) + \frac{p}{x}J_p(x).$

789. $J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x}J_p(x) - J_{p-1}(x).$

790. $J_2(x) = J''_0(x) - \frac{1}{x}J'_0(x).$

791. $J_2(x) - J_0(x) = 2J''_0(x).$

792. $J_3(x) + 3J'_0(x) + 4J'''_0(x) = 0.$

793. $x^2J''_p(x) = (p^2 - p - x^2)J_p(x) + xJ_{p+1}(x).$

794. Comprobar que $\sqrt{x}\,J_1(2\sqrt{x})$ y $\sqrt{x}\,Y_1(2\sqrt{x})$ son soluciones de la ecuación

$$xy'' + y = 0.$$

795. Comprobar que $\sqrt[4]{x}\,J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{x})$ y $\sqrt[4]{x}\,J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x})$ son soluciones de la ecuación

$$xy'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}y = 0.$$

796. Comprobar que

$$C_1J_p(x)\int_0^x \frac{dt}{tJ_p^2(t)} + C_2J_p(x)$$

es solución de la ecuación de Bessel.

Nota 3. He aquí otro método de integración de las ecuaciones diferenciales mediante series que resulta más sencillo al emplearlo a las ecuaciones diferenciales no lineales.

Sea dada la ecuación diferencial

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

y las condiciones iniciales

$$y|_{x=x_0}=y_0,\quad y'|_{x=x_0}=y'_0,\quad \ldots,\quad y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}. \qquad (2)$$

Introduzcamos la siguiente definición.

Se dice que una función $\varphi(x)$ es holomorfía en un entorno $|x-x_0|<\rho$ del punto $x=x_0$, si en este entorno ésta es expresable por una serie de potencias

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k,$$

convergente en el recinto $|x-x_0|<\rho$.

Análogamente, la función $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se llama holomorfía con respecto de todos sus argumentos en el entorno

$$|x_k-x_k^{(0)}|<\rho_k \qquad (1, 2, \ldots, n)$$

del punto $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ si es expresable por una serie de potencias

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)=$$
$$=\sum c_{k_1k_2\ldots k_n}(x_1-x_1^{(0)})^{k_1}(x_2-x_2^{(0)})^{k_2}\ldots(x_n-x_n^{(0)})^{k}$$

convergente en el recinto

$$|x_k-x_k^{(0)}|<\rho_k \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Subsiste el siguiente teorema.

Teorema. *Si el segundo miembro de la ecuación (1) es una función holomorfía con respecto de todos sus argumentos $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ en entorno Ω:*

$$|x-x_0|<R,\quad |y-y_0|<R_1,\quad |y'-y'_0|<$$
$$<R_1,\quad \ldots,\quad |y^{(n-1)}-y_0^{(n-1)}|<R_1$$

del punto $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$, la ecuación (1) tiene una y sólo una solución $y=y(x)$ que cumple las condiciones iniciales (2) y es holomorfía en un entorno del punto $x=x_0$:

$$y(x)=y_0+y'_0(x-x_0)+\frac{y''_0}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\sum_{k=n}^{\infty}a_k(x-x_0)^k. \qquad (4)$$

La serie (4) es convergente en el recinto $|x - x_0| < \rho$, donde

$$\rho = a\left[1 - e^{-\frac{b}{(n+1)aM}}\right]; \tag{5}$$

aquí, a y b son unas constantes que satisfacen a las condiciones: $0 < a < R$, $0 < b < R$, y

$$M = \max_{\Omega} |f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})|. \tag{6}$$

Los primeros $n+1$ coeficientes de la serie (4) se determinan por las condiciones iniciales (2) y la ecuación diferencial (1).

Los demás coeficientes se determinan por la ecuación diferencial, derivándola sucesivamente. Por ejemplo:

$$a_{n+1} = y^{(n+1)}|_{x=x_0} = \left.\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} y^{(k+1)}\right)\right|_{x=x_0} =$$

$$= \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x=x_0} \cdot y_0' + \sum_{k=1}^{n-1} \left.\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\right|_{x=x_0} \cdot y^{(k+1)}(x_0). \tag{7}$$

Observación. Si la ecuación (1) es lineal,

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = \psi(x), \tag{8}$$

donde $p_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ y $\psi(x)$ son funciones holomorfas en todo el eje Ox, la serie (4) es convergente también en todo el eje.

Ejemplo. Hallar los cuatro primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de la solución $y = y(x)$ de la ecuación

$$y'' = e^{xy},$$

que cumple las condiciones iniciales:

$$y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 0.$$

Solución. Fácilmente se observa que el segundo miembro de la ecuación, o sea, la función e^{xy}, es desarrollable en serie de potencias de x e y en un entorno de punto (0, 0); esta serie es convergente en la región $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$ (es decir, el segundo miembro es una función holomorfa).

Buscaremos una solución particular en forma de serie (4):

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots .$$

Empleando la misma ecuación, hallamos: $y''(0)=$ $=e^{xy}|_{x=0}=1$.

Derivando sucesivamente ambos miembros de la ecuación y haciendo $x=0$ en las igualdades obtenidas, tendremos:

$$y'''(0)=(y+xy')e^{xy}|_{x=0}=1,$$

$$y^{IV}(0)=[2y'+xy''+(y+xy')^2]e^{xy}|_{x=0}=1.$$

Poniendo en la serie (1) los valores obtenidos $y''(0)$, $y'''(0)$, $y^{IV}(0)$, obtenemos el desarrollo buscado de la solución:

$$y(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots .$$

En los ejercicios siguientes hay que hallar los tres primeros términos del desarrollo en serie de potencias de la solución de la ecuación diferencial para las condiciones iniciales dadas.

797. $y'=1-xy,\quad y|_{x=0}=0.$

·798. $y'=\frac{y-x}{y+x},\quad y|_{x=0}=1.$

799. $y'=\operatorname{sen} xy,\quad y|_{x=0}=1.$

800. $y''+xy=0,\quad y|_{x=0}=0,\quad y'|_{x=0}=1.$

801. $y''-\operatorname{sen} xy'=0,\quad y|_{x=0}=0,\quad y'|_{x=0}=1.$

802. $xy''+y\operatorname{sen} x=x,\quad y|_{x=\pi}=1,\quad y'|_{x=\pi}=0.$

803. $y''\ln x-\operatorname{sen} xy=0,\quad y|_{x=e}=e^{-1},\quad y'|_{x=e}=0.$

804. $y'''+x\operatorname{sen} y=0,\quad y|_{x=0}=\frac{\pi}{2};\quad y'|_{x=0}=0,$

$y''|_{x=0}=0.$

3. *Búsqueda de las soluciones periódicas de las ecuaciones diferenciales lineales.*

Sea dada una ecuación diferencial lineal no homogénea de 2° orden, de coeficientes constantes

$$y'' + p_1y' + p_2y = f(x), \tag{1}$$

donde $f(x)$ es una función periódica, de período 2π, desarrollable en serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx). \tag{2}$$

Busquemos una solución periódica de la ecuación (1) en la forma

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \operatorname{sen} nx). \tag{3}$$

Reemplazando la serie (3) en la ecuación (1), elegimos sus coeficientes de modo que formalmente se cumpla la igualdad (1). Igualando los términos independientes y los coeficientes de cos nx y sen nx en los primeros y segundos miembros de la igualdad obtenida, hallamos:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{a_0}{p_2}, \quad A_n = \frac{(p_2 - n^2)\,a_n - p_1 n b_n}{(p_2 - n^2)^2 + p_1^2 n^2}, \\ B_n &= \frac{(p_2 - n^2)\,b_n + p_1 n a_n}{(p_2 - n^2)^2 + p_1^2 n^2} \quad (n = 1,\ 2\ \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

La primera de las igualdades (4) nos da la condición necesaria para la existencia de una solución de la forma (3):

si $a_0 \neq 0$, es necesario que sea $p_2 \neq 0$. Poniendo (4) en (3) resulta:

$$y(x) = \frac{a_0}{2p_2} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(p_2 - n^2)\,a_n - p_1 n b_n] \cos nx + [(p_2 - n^2)\,b_n + p_1 n a_n] \operatorname{sen} nx}{(p_2 - n^2)^2 + p_1^2 n^2}. \tag{5}$$

Cuando $p_1 = 0$ y $p_2 = n^2$, donde $n = 1, 2, \ldots$, existirá solución periódica solamente si se cumple la condición

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx = 0. \tag{6}$$

Los coeficientes A_k y B_k para $k \neq n$ se hallan por las fórmulas (4), mientras que los coeficientes A_n y B_n son constantes arbitrarios, puesto que la expresión $A_n \cos nx + B_n \operatorname{sen} nx$ es la solución general de la ecuación homogénea correspondiente.

Cuando no se cumplen las condiciones (6), la ecuación (4) carece de soluciones periódicas (aparece el fenómeno de la resonancia).

Cuando $p_2 = 0$ y $a_0 = 0$, el coeficiente A_0 queda indeterminado y la ecuación (4) tiene una infinidad de soluciones periódicas, que se diferencian entre si en un sumando constante.

Si el segundo miembro $f(x)$ de la ecuación (1) tiene periodo $2l \neq 2\pi$, hay que buscar la solución de la ecuación (1) en la forma

$$y = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n x}{l} + B_n \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{l} \right).$$

En este caso, las fórmulas (4) varían correspondientemente.

Ejemplo 1. Hallar las soluciones periódicas de la ecuación

$$y'' + 4y = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}.$$

Solución. Se tiene

$$p_1 = 0, \; p_2 = 4 = 2^2, \; a_0 = 0, \; a_n = 0, \; b_n = \frac{1}{n^2} \; (n = 3, 4, \ldots).$$

La función $f(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}$ no contiéne el término resonante $a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x$, y, por consiguiente, la ecuación tiene una infinidad de soluciones periódicas.

Los coeficientes se hallan por las fórmulas (4):

$$A_0=0,\ A_n=0,\ B_1=0,\ B_n=\frac{1}{n^2(4-n^2)},\quad (n=3,\ 4,\ \ldots).$$

Todas las soluciones periódicas quedan dadas por la fórmula

$$y(x)=A_2\cos 2x+B_2\operatorname{sen} 2x-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2(n^2-4)},$$

donde A_2 y B_2 son constantes arbitrarias.

Ejemplo 2. Hallar las soluciones periódicas de la ecuación

$$y''+y=\cos x.$$

Solución. En este caso, $p_1=0$, $p_2=1$. Comprobemos el cumplimiento de las condiciones (6). Se tiene:

$$\int_0^{2\pi}\cos x\cos x\,dx=\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx=\pi\neq 0;\quad \int_0^{2\pi}\cos x\operatorname{sen} x\,dx=0.$$

(aquí, $n=1$).

Las condiciones (6) de existencia de solución periódica no se cumplen. Por consiguiente, la ecuación dada no tiene soluciones periódicas.

Ejemplo 3. Hallar las soluciones periódicas de la ecuación

$$y''-y=|\operatorname{sen} x|.$$

Solución. La función $f(x)=|\operatorname{sen} x|$ es periódica, de período π. La desarrollamos en serie de Fourier en el intervalo $(-\pi,\ \pi)$:

$$|\operatorname{sen} x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1},\quad (-\pi,\ \pi).$$

Buscamos la solución de la ecuación dada de la forma

$$y(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\operatorname{sen} nx).$$

Se tiene

$$p_1=0, \quad p_2=-1, \quad a_0=\frac{4}{\pi},$$

$$\left.\begin{aligned} &a_{2n-1}=0,\\ &a_{2n}=-\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}, \quad b_n=0 \end{aligned}\right\} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

De las fórmulas (4) hallamos:

$$A_0=-\frac{4}{\pi}; \quad A_{2n-1}=0; \quad A_{2n}=-\frac{4}{\pi}\frac{1}{16n^2-1};$$

$$B_n=0 \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Por consiguiente, la ecuación tiene una solución periódica de la forma

$$y(x)=-\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{16n^2-1}.$$

Hallar las soluciones periódicas de las siguientes ecuaciones diferenciales.

805. $y''+3y=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx+\operatorname{sen} nx}{n^3}.$

806. $y''+y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}.$

807. $y''+y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2}.$

808. $y''-4y'+4y=\pi^2-x^2, \qquad -\pi<x<\pi.$

809. $y''-4y=|\cos \pi x|.$

810. $y''-4y'+4y=\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x).$

811. $y''+9y=\operatorname{sen}^3 x.$

§ 18. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE COEFICIENTES CONSTANTES

Se llama *sistema lineal* de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes al de la forma

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+f_i(t) \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

donde a_{ij} son unos números dados y $f_i(t)$, unas funciones dadas.

El sistema lineal se llama homogéneo, si todas $f_i(t)\equiv 0$. El conjunto de funciones

$$x_1=\varphi_1(t), \quad x_2=\varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n=\varphi_n(t), \tag{2}$$

determinadas y diferenciables, con derivadas continuas, en el intervalo (a, b), se llama solución del sistema (1) en este intervalo, si las funciones (2) convierten a las ecuaciones del sistema (1) en identidades, que se cumplen para todos los valores de t de (a, b).

El problema de la búsqueda de la solución

$$x_1=x_1(t), \quad x_2=x_2(t), \quad \ldots, \quad x_n=x_n(t) \tag{3}$$

que satisface a las condiciones iniciales

$$x_1(t_0)=x_1^0, \quad x_2(t_0)=x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n(t_0)=x_n^0 \tag{4}$$

se denomina problema de Cauchy.

Examinaremos cuatro metodos muy difundidos de solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes de la forma (1).

1. REDUCCION DE UN SISTEMA A UNA ECUACION DE n-ESIMO ORDEN

El modo más sencillo de integrar el sistema (1) consiste en reducirlo a una ecuación diferencial de orden n.

Resulta que se obtiene una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes.

Ilustremos este método en el ejemplo de un sistema de dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by + f(t) \quad (1,1) \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + g(t) \quad (1,2) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Aquí, a, b, c, d son coeficientes constantes, $f(t)$, $g(t)$ son unas funciones dadas, mientras que $x(t)$, $y(t)$ son las funciones incógnitas. De la ecuación (1, 1) hallamos:

$$y = \frac{1}{b}\left(\frac{dx}{dt} - ax - f(t)\right). \qquad (2)$$

Reemplazando y en la segunda ecuación del sistema por el segundo miembro de (2), y $\frac{dy}{dt}$ por la derivada del segundo miembro de (2), obtenemos una ecuación diferencial de segundo orden en $x(t)$:

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Cx + P(t) = 0,$$

donde A, B, C son constantes.

De aquí hallamos, $x = x(t, C_1, C_2)$ y poniendo en (2) el valor hallado de x, así como $\frac{dx}{dt}$, hallamos y.

Ejemplo. Integrar el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + 1 \quad (3,1) \\ \frac{dy}{dt} &= x + 1 \quad (3,2) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

De (3,1) hallamos:

$$y = \frac{dx}{dt} - 1. \qquad (4)$$

Poniendo (4) en (3,2), resulta una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 1 - x = 0. \tag{5}$$

La solución general de la ecuación (5) es:

$$x = C_1e^t + C_2e^{-t} - 1. \tag{6}$$

Poniendo en (4) la derivada respecto a t de (6) obtenemos:

$$y = C_1e^t - C_2e^{-t} - 1.$$

La solución general del sistema (3) es:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1e^t + C_2e^{-t} - 1 \\ y &= C_1e^t - C_2e^{-t} - 1 \end{aligned}\right\}.$$

2. METODO DE EULER DE INTEGRACION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGENEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES

Examinemos este método en el caso de un sistema de tres ecuaciones diferenciales lineales:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by + cz \\ \frac{dy}{dt} &= a_1x + b_1y + c_1z \\ \frac{dz}{dt} &= a_2x + b_2y + c_2z \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Buscamos la solución del sistema en la forma

$$x = \lambda e^{rt}, \quad y = \mu e^{rt}, \quad z = \nu^{rt}, \tag{2}$$

donde λ, μ, ν y r son constantes.

Poniendo (2) en (1) y simplificando por e^{rt}, resulta un sistema de ecuaciones para determinar λ, μ y ν:

$$\left.\begin{aligned} (a - r)\lambda + b\mu + c\nu &= 0, \\ a_1\lambda + (b_1 - r)\mu + c_1\nu &= 0, \\ a_1\lambda + b_2\mu + (c_2 - r)\nu &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

El sistema (3) posee solución no nula cuando su determinante Δ es igual a cero:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a-r & b & c \\ a_1 & b_1-r & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2-r \end{vmatrix}=0. \quad (4)$$

La ecuación (4) en r denominada característica, es cúbica.

a) Supongamos que las raíces r_1, r_2 y r_3 de la ecuación característica son reales y distintas. Sustituyendo en (3) r por el número r_1 y resolviendo el sistema (3) se obtienen los números λ_1, μ_1 y ν_1. Haciendo después en (3) $r=r_2$, se obtienen los números λ_2, μ_2, ν_2. Finalmente, para $r=r_3$, resulta λ_3, μ_3, ν_3. Para las tres colecciones de los números λ, μ y ν, obtenemos tres sistemas de soluciones particulares:

$$\left.\begin{array}{lll} x_1=\lambda_1 e^{r_1 t}, & y_1=\mu_1 e^{r_1 t}, & z_1=\nu_1 e^{r_1 t} \\ x_2=\lambda_2 e^{r_2 t}, & y_2=\mu_2 e^{r_2 t}, & z_2=\nu_2 e^{r_2 t} \\ x_3=\lambda_3 e^{r_3 t}, & y_3=\mu_3 e^{r_3 t}, & z_3=\nu_3 e^{r_3 t} \end{array}\right\}. \quad (5)$$

La solución general del sistema (1) tiene la forma

$$\left.\begin{array}{l} x=C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3, \\ y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3, \\ z=C_1z_1+C_2z_2+C_3z_3. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Ejemplo 1. Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt}=3x-y+z. \\ \frac{dy}{dt}=-x+5y-z, \\ \frac{dz}{dt}=x-y+3z. \end{array}\right\}. \quad (7)$$

Solución. Escribimos la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 3-r & -1 & 1 \\ -1 & 5-r & -1 \\ 1 & -1 & 3-r \end{vmatrix}=0$$

o bien, $r^3-11r^2+36r-36=0$.

A las raíces $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 6$ les corresponden los números

$$\lambda_1 = 1, \quad \mu_1 = 0, \quad \nu_1 = -1;$$
$$\lambda_2 = 1, \quad \mu_2 = 1, \quad \nu_2 = 1;$$
$$\lambda_3 = 1, \quad \mu_3 = -2, \quad \nu_3 = 1.$$

Escribimos las soluciones particulares

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 = e^{2t}, & y_1 = 0, & z_1 = -e^{2t} \\ x_2 = e^{3t}, & y_2 = e^{3t}, & z_2 = e^{3t} \\ x_3 = e^{6t}, & y_3 = -2e^{6t}, & z_3 = e^{6t} \end{array}\right\} \tag{9}$$

Respuesta:

$$\left.\begin{array}{l} x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t} \\ y = C_2e^{3t} - 2C_3e^{6t} \\ z = -C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t} \end{array}\right\}. \tag{10}$$

b) Examinemos ahora el caso cuando las raíces de la ecuación característica son complejas.

Ejemplo 2. Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{array}\right\}. \tag{11}$$

S o l u c i ó n. Escribimos el sistema para la determinación de λ y μ:

$$\left.\begin{array}{l} (1 - r)\lambda - 5\mu = 0 \\ 2\lambda - (1 + r)\mu = 0 \end{array}\right\}. \tag{12}$$

La ecuación caracteristica

$$\begin{vmatrix} 1 - r & -5 \\ 2 & -1 - r \end{vmatrix} = 0$$

tiene las raíces $r_1 = 3i$, $r_2 = -3i$.

Poniendo en (12) $r_1 = 3i$, obtenemos dos ecuaciones para la determinación de λ_1 y μ_1:

$$\left.\begin{array}{l} (1 - 3i)\lambda_1 - 5\mu_1 = 0 \\ 2\lambda_1 - (1 + 3i)\mu_1 = 0 \end{array}\right\}.$$

una de las cuales es consecuencia de la otra (puesto que el determinante del sistema (12) es igual a cero).

Se puede tomar $\lambda_1 = 5$, $\mu_1 = 1 - 3i$, entonces, la primera solución particular se escribirá así:

$$x_1 = 5e^{3it}, \quad y_1 = (1 - 3i)\,e^{3it}. \tag{13}$$

De modo análogo, sustituyendo en (12) la raíz $r_2 = -3i$, se halla la segunda solución particular:

$$x_2 = 5e^{3it}, \quad y_2 = (1 + 3i)\,e^{3it}. \tag{14}$$

Pasemos a un nuevo sistema fundamental de soluciones:

$$\left.\begin{array}{ll} \tilde{x}_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, & \tilde{x}_2 = \dfrac{x_1 - x_2}{2i} \\ \tilde{y}_1 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}, & \tilde{y}_2 = \dfrac{y_1 - y_2}{2i} \end{array}\right\} \tag{15}$$

Aplicando la conocida fórmula de Euler

$$e^{\pm\alpha it} = \cos\alpha t \pm i \operatorname{sen}\alpha t, \tag{16}$$

donde α es un número real, de (14) y (15) obtenemos:

$$\begin{array}{ll} \tilde{x}_1 = 5\cos 3t, & \tilde{x}_2 = 5\operatorname{sen} 3t; \\ \tilde{y}_1 = \cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t, & \tilde{y}_2 = \operatorname{sen} 3t - 3\cos 3t. \end{array}$$

La solución general del sistema (11) es:

$$x = C_1\tilde{x}_1 + C_2\tilde{x}_2 = 5C_1\cos 3t + 5C_2\operatorname{sen} 3t,$$
$$y = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 = C_1(\cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t) + C_2(\operatorname{sen} 3t - 3\cos 3t).$$

Observación. Una vez hallada la primera solución particular (13) se podría haber escrito inmediatamente la solución general del sistema (11), aplicando las fórmulas

$$\left.\begin{array}{l} x = C_1\operatorname{Re} x_1 + C_2\operatorname{Im} x_1, \\ y = C_1\operatorname{Re} y_1 + C_2\operatorname{Im} y_1 \end{array}\right\}, \tag{17}$$

donde $\operatorname{Re} z$ y $\operatorname{Im} z$ indican las partes real e imaginaria del número complejo z, respectivamente, es decir, que si $z = a + bi$, entonces, $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$.

c) Caso de raíces múltiples.

Ejemplo 3. Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + y \quad (18,1) \\ \frac{dy}{dt} &= 4y - x \quad (18,2) \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

S o l u c i ó n. La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 2-r & 1 \\ -1 & 4-r \end{vmatrix} = 0$$

o bien, $r^2 - 6r + 9 = 0$ tiene una raíz múltiple $r_1 = r_2 = 3$. La solución se debe buscar de la forma

$$\left.\begin{aligned} x &= (\lambda_1 + \mu_1 t)\, e^{3t} \\ y &= (\lambda_2 + \mu_2 t)\, e^{3t} \end{aligned}\right\}. \qquad (19)$$

Poniendo (19) en (18,1), obtenemos:

$$3(\lambda_1 + \mu_1 t) + \mu_1 = 2(\lambda_1 + \mu_1 t) + (\lambda_2 + \mu_2 t). \qquad (20)$$

Identificando los coeficientes de iguales potencias de t en el primero y segundo miembro de (20), resulta:

$$\left.\begin{aligned} 3\lambda_1 + \mu_1 &= 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 3\mu_1 &= 2\mu_1 + \mu_2 \end{aligned}\right\}, \qquad (21)$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2 &= \lambda_1 + \mu_1 \\ \mu_2 &= \mu_1 \end{aligned}\right\}. \qquad (22)$$

Las cantidades λ_1 y μ_1 se mantienen arbitrarias. Indicándolas mediante C_1 y C_2, respectivamente, obtenemos la solución general del sistema (18) en la forma:

$$\left.\begin{aligned} x &= (C_1 + C_2 t)\, e^{3t} \\ y &= (C_1 + C_2 + C_2 t)\, e^{3t} \end{aligned}\right\}.$$

O b s e r v a c i ó n. Fácilmente se comprueba que poniendo (19) en (18,2) se obtiene el mismo resultado (22) En efecto, de la igualdad

$$\mu_2 + 3(\lambda_2 + \mu_2 t) = 4(\lambda_2 + \mu_2 t) - (\lambda_1 + \mu_1 t)$$

obtenemos dos relaciones para la determinación de λ_2 y μ_2 mediante λ_1 y μ_1:

$$\left.\begin{aligned} \mu_2 + 3\lambda_2 = 4\lambda_2 - \lambda_1 \\ 3\mu_2 = 4\nu_2 - \mu_1 \end{aligned}\right\},$$

de donde

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \mu_2, \quad \mu_2 = \mu_1.$$

3. RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE COMBINACIONES INTEGRABLES

Este método de integración de sistemas de ecuaciones diferenciales (no necesariamente lineales) consiste en lo siguiente: mediante operaciones aritméticas convenientes (por ejemplo, sumando, restando, etc.) de las ecuaciones del sistema dado se forman las llamadas combinaciones integrables, o sea, unas ecuaciones fáciles de integrar de la forma

$$F\left(t,\ u,\ \frac{du}{dt}\right) = 0, \tag{1}$$

donde u es una función de las funciones buscadas $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots, x_n(t)$.

Ejemplo 1. Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \frac{y^2}{x} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x^2}{y} \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Solución. Escribamos el sistema (2) en la forma

$$\left.\begin{aligned} x\,dx = y^2\,dt \\ y\,dy = x^2\,dt \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Sumando término a término, obtenemos:

$$x\,dx + y\,dy = (x^2 + y^2)\,dt,$$

o bien,

$$\frac{d\,(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 2\,dt,$$

de donde

$$\ln(x^2 + y^2) = 2t + \ln C_1.$$

Potenciando, se tiene

$$x^2+y^2=C_1e^{2t}. \tag{4}$$

Restando término a término la segunda ecuación (3) de la primera, obtenemos

$$x\,dx-y\,dy=(y^2-x^2)\,dt,$$

o bien,

$$\frac{d(x^2-y^2)}{x^2-y^2}=-2\,dt,$$

de donde

$$x^2-y^2=C_2e^{-2t}. \tag{5}$$

Despejando x e y en (4) y (5), hallamos la solución general del sistema (2):

$$x=\sqrt{\tilde{C}_1e^{2t}+\tilde{C}_2e^{-2t}},$$
$$y=\sqrt{\tilde{C}_1e^{2t}-\tilde{C}_2e^{-2t}},$$

donde para simplificar se ha hecho

$$\tilde{C}_1=\frac{1}{2}C_1,\quad \tilde{C}_2=\frac{1}{2}C_2.$$

Ejemplo 2. Hallar la solución particular del sistema

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=3x+5y, \quad (6{,}1)\\ \frac{dy}{dt}&=-2x-8y, \quad (6{,}2)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

que satisface a las condiciones iniciales

$$x|_{t=0}=2,\qquad y|_{t=0}=5. \tag{7}$$

Solución. Multiplicando por 2 la primera ecuación y sumándola con la segunda, resulta

$$\frac{d(2x+y)}{dt}=2(2x+y),$$

de donde

$$\begin{aligned}2x+y&=C_1e^{2t},\\ y&=C_1e^{2t}-2x.\end{aligned} \tag{8}$$

Poniendo (8) en (6,1), obtenemos una ecuación lineal para determinar x:

$$\frac{dx}{dt} = -7x + 5C_1e^{2t}. \quad (9)$$

De aqui,

$$x = C_2e^{-7t} + \frac{5}{9}C_1e^{2t}. \quad (10)$$

Por consiguiente,

$$y = -\frac{1}{9}C_1e^{2t} - 2C_2e^{-7t}. \quad (11)$$

Las expresiones (10) y (11) representan la solución general del sistema (6).

Para hallar la solución particular que satisface a la condición (7) hay que sustituir en (10) y (11) las variables t, x e y por los números 0, 2 y 5, respectivamente. Para la determinación de C_1 y C_2, resulta el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 2 &= C_2 + \frac{5}{9}C_1, \\ 5 &= -\frac{1}{9}C_1 - 2C_2, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

de donde

$$C_1 = 9, \quad C_2 = -3.$$

La respuesta es:

$$\left.\begin{aligned} x &= 5e^{2t} - 3e^{-7t} \\ y &= -e^{2t} + 6e^{-7t} \end{aligned}\right\}.$$

4. METODO DE VARIACION DE LAS CONSTANTES

Aquí ilustraremos este método en el caso de tres ecuaciones no homogéneas.

Sea dado el sistema

$$\left.\begin{aligned} x' + a_1x + b_1y + e_1z &= f_1(t), \quad (1,1) \\ y' + a_2x + b_2y + e_2z &= f_2(t), \quad (1,2) \\ z' + a_3x + b_3y + e_3z &= f_3(t). \quad (1,3) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Suponemos que ya se ha hallado la solución general del sistema homogéneo correspondiente y que tiene la forma

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3, \\ y &= C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3, \\ z &= C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3. \end{aligned}\right\}. \quad (2)$$

Vamos a buscar una solución del sistema no homogêneo (1) de la forma

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1(t)\,x_1 + C_2(t)\,x_2 + C_3(t)\,x_3, \\ y &= C_1(t)\,y_1 + C_2(t)\,y_2 + C_3(t)\,y_3, \\ z &= C_1(t)\,z_1 + C_2(t)\,z_2 + C_3(t)\,z_3. \end{aligned}\right\}, \quad (3)$$

donde $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$ son unas nuevas funciones incógnitas Pongamos (3) en (1); la ecuación (1, 1) toma la forma

$$\begin{aligned} C_1'x_1 + C_2'x_2 + C_3'x_3 + C_1(x_1' + a_1x_1 + b_1y_1 + e_1z_1) &+ \\ + C_2(x_2' + a_1x_2 + b_1y_2 + e_1z_2) &+ \\ + C_3(x_3' + a_1x_3 + b_1y_3 + e_1z_3) &= f_1(t). \quad (4) \end{aligned}$$

Todas las sumas que figuran entre paréntesis se convertirán en cero (puesto que (2) es solución de la ecuación homogénea correspondiente), de modo que tendremos:

$$C_1'x_1 + C_2'x_2 + C_3'x_3 = f_1(t). \quad (5)$$

Análogamente, de (1,2) y (1,3), después de poner (3), obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_3'y_3 &= f_2(t), \\ C_1'z_1 + C_2'z_2 + C_3'z_3 &= f_3(t). \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

El sistema de ecuaciones (5) y (6), lineales con respecto a C_1', C_2', C_3', tiene solución, puesto que su determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

es distinto de cero, en virtud de la independencia lineal de las soluciones particulares del sistema homogéneo correspondiente.

Una vez conocidas $C_1'(t)$, $C_2'(t)$, $C_3'(t)$, integrando hallamos $C_1(t)$, $C_2(t)$, $C_3(t)$ y, por consiguiente, la solución (3) del sistema no homogéneo (1).

Ejemplo. Empleando el método de variación de las constantes, resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + 2x + 4y &= 1 + 4t, \\ \frac{dy}{dt} + x - y &= \frac{3}{2}t^2. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

S o l u c i ó n. Resolvemos primero el sistema homogéneo

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + 2x + 4y &= 0, \\ \frac{dy}{dt} + x - y &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Derivando la primera ecuación respecto de t, resulta

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} = 0.$$

Pero de la segunda ecuación $\frac{dy}{dt} = y - x$, por esto obtenemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4y - 4x = 0.$$

De la primera ecuación $4y = -\frac{dx}{dt} - 2x$, de modo que

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt} - 2x - 4x = 0,$$

o bien,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 6x = 0.$$

La solución general de esta ecuación es:

$$x = C_1e^{2t} + C_2e^{-3t}.$$

Pero, como

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\frac{dx}{dt},$$

enemos

$$y = -C_1e^{2t} + \frac{1}{4}C_2e^{-3t}.$$

Sustituyendo C_2 por $4C_2$, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1e^{2t} + 4C_2e^{-3t} \\ y &= -C_1e^{2t} + C_2e^{-3t}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Esta es la solución general del sistema homogéneo (8).

Busquemos ahora una solución del sistema no homogéneo (7) de la forma

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1(t)\, e^{2t} + 4C_2(t)\, e^{-3t} \\ y &= -C_1(t)\, e^{2t} + C_2(t)\, e^{-3t} \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Después de poner (10) en (7), obtenemos

$$\left.\begin{aligned} C_1'(t)\, e^{2t} + 4C_2'(t)\, e^{-3t} &= 1 + 4t \\ -C_1'(t)\, e^{2t} + C_2'(t)\, e^{-3t} &= \frac{3}{2}t^2 \end{aligned}\right\}$$

De aquí,

$$C_1'(t) = \frac{1 + 4t - 6t^2}{5}\, e^{-2t},$$

$$C_2'(t) = \frac{1 + 4t + \frac{3}{2}t^2}{5}\, e^{3t}.$$

Por consiguiente,

$$\left.\begin{aligned} C_1(t) &= \frac{t + 3t^2}{5}\, e^{-2t} + C_1 \\ C_2(t) &= \frac{t + \frac{1}{2}t^2}{5}\, e^{3t} + C_2 \end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

donde C_1, C_2 son las constantes de integración.

Poniendo en (10) las expresiones halladas de $C_1(t)$ y $C_2(t)$, obtenemos la solución general del sistema (7):

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1e^{2t} + 4C_2e^{-3t} + t + t^2 \\ y &= -C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} - \frac{1}{2}t^2 \end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

Obsérvese que las funciones $\varphi_1(t) = t + t^2$ y $\varphi_2(t) = -\frac{1}{2}t^2$ forman una solución particular del sistema no homogéneo (7).

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

812. $$\left.\begin{array}{l}\frac{dx}{dt}=3-2y\\ \frac{dy}{dt}=2x-2t\end{array}\right\}.$$

813. $$\left.\begin{array}{l}\frac{dx}{dt}=x-2y\\ \frac{dy}{dt}=x+3y\end{array}\right\}.$$

814. $$\left.\begin{array}{l}\frac{dx}{dt}+3x+y=0\\ \frac{dy}{dt}-x+y=0\end{array}\right\}, \qquad x(0)=y(0)=1.$$

815. $$\left.\begin{array}{l}\frac{dx}{dt}=3x-\frac{1}{2}y-3t^2-\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}\\ \frac{dy}{dt}=2y-2t-1\end{array}\right\}.$$

816. $$\left.\begin{array}{l}\frac{dx}{dt}=-7x+y\\ \frac{dy}{dt}=-5y-2x\end{array}\right\}.$$

817. $$\left.\begin{array}{l}\frac{dx}{dt}=2x-9y\\ \frac{dy}{dt}=x+8y\end{array}\right\}.$$

818. $$\left.\begin{array}{l}\frac{dx}{dt}=y+z\\ \frac{dy}{dt}=z+x\\ \frac{dz}{dt}=x+y\end{array}\right\}.$$

819. $$\left.\begin{array}{l}\frac{dx}{dt}=y+z\\ \frac{dy}{dt}=3x+z\\ \frac{dz}{dt}=3x+y\end{array}\right\}.$$

820. $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 8y \\ \frac{dy}{dt} &= -2z \\ \frac{dz}{dt} &= 2x + 8y - 2z \end{aligned}\right\}.$

821. $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + y - 2z - t + 2 \\ \frac{dy}{dt} &= 1 - x \\ \frac{dz}{dt} &= x + y - z - t + 1 \end{aligned}\right\}.$

822. $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + y + z + e^t \\ \frac{dy}{dt} &= x - y + z + e^{3t} \\ \frac{dz}{dt} &= x + y + z + 4 \end{aligned}\right\}.$

823. $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x\cos t \\ 2\frac{dy}{dt} &= (e^t + e^{-t})\, y \end{aligned}\right\}.$

824. $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= e^t - y - 5x \\ \frac{dy}{dt} &= e^{2t} + x - 3y \end{aligned}\right\}, \quad x(0) = \frac{119}{900}, \quad y(0) = \frac{211}{900}.$

825. $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x + 8y \\ \frac{dy}{dt} &= -3y - x \end{aligned}\right\}, \quad x(0) = 6, \quad y(0) = -2.$

826. $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x \end{aligned}\right\}, \quad x(0) = y(0) = 1.$

827. $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -4(x + y) \\ \frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} &= -4y \end{aligned}\right\}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

828. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=4x-5y\\ \frac{dy}{dt}&=x\end{aligned}\right\}$, $x(0)=0$, $y(0)=1$.

829. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x+y+t\\ \frac{dy}{dt}&=x-2y+2t\end{aligned}\right\}$, $x(0)=-\frac{7}{9}$, $y(0)=-\frac{5}{9}$.

830. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x+5y\\ \frac{dy}{dt}&=-3y-x\end{aligned}\right\}$, $x(0)=-2$, $y(0)=1$.

831. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}+2\frac{dy}{dt}&=17x+8y\\ 13\frac{dx}{dt}&=53x+2y\end{aligned}\right\}$, $x(0)=2$, $y(0)=-1$.

832. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=y\\ \frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}&=x+y\end{aligned}\right\}$, $x(\pi)=-1$, $y(\pi)=0$.

833. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}&=e^{-t}-y\\ 2\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}&=\operatorname{sen} t-2y\end{aligned}\right\}$, $x(0)=-2$, $y(0)=1$.

834. $\left.\begin{aligned}2\frac{dx}{dt}&=6x-y-6t^2-t+3\\ \frac{dy}{dt}&=2y-2t-1\end{aligned}\right\}$, $x(0)=2$, $y(0)=3$.

835. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{1}{y}\\ \frac{dy}{dt}&=\frac{1}{x}\end{aligned}\right\}$.

836. $\dfrac{dt}{my-nx}=\dfrac{dx}{nt-ly}=\dfrac{dy}{lx-mt}$.

837. $\dfrac{dx}{y}=-\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dp}{q}=-\dfrac{dq}{p}$.

838. $\dfrac{t\,dt}{y^2-2xy-x^2}=\dfrac{dx}{x+y}=\dfrac{dy}{x-y}$.

839. $\left.\begin{array}{l} t\,dx=(t-2x)\,dt \\ t\,dy=(tx+ty+2x-t)\,dt \end{array}\right\}.$

840. $\dfrac{dt}{t^2-x^2-y^2}=\dfrac{dx}{2tx}=\dfrac{dy}{2ty}.$

841. $\dfrac{dt}{t}=\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{ty}.$

842. $\dfrac{dt}{xy}=\dfrac{dx}{ty}=\dfrac{dy}{tx}.$

§ 19. TEORIA DE LA ESTABILIDAD

1. ESTABILIDAD SEGUN LIAPUNOV

Sea dado un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Una solución $\varphi_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ del sistema (1), que satisface a las condiciones iniciales $\varphi_i(t_0)=\varphi_{i0}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ se llama *estable según Liapunov*, si para cualquier $\varepsilon>0$ existe un número $\delta(\varepsilon)>0$, tal que, para cada solución $x_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ del sistema (1) cuyos valores iniciales cumplan las condiciones

$$|x_i(t_0)-\varphi_{i0}|<\delta \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

se verifica la desigualdad

$$|x_i(t)-\varphi_i(t)|<\varepsilon \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

para todos los valores $t \geqslant t_0$.

Si para valores de $\delta>0$ arbitrariamente pequeños no se cumple la desigualdad (3), al menos para una solución $x_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, la solución $\varphi_i(t)$ se llama *inestable*.

Si, en las condiciones (2), además del cumplimiento de la desigualdad (3), se cumple también la condición

$$\lim_{t\to\infty}|x_i(t)-\varphi_i(t)|=0, \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

la solución $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se llama *asintóticamente estable.*

El estudio de la estabilidad de una solución $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ del sistema (1) se puede reducir al estudio de la estabilidad de la solución nula (trivial) $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de un sistema análogo al sistema (1):

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1')$$

donde $F_i(0, 0, \ldots, 0, t) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Se dice que $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es un *punto de reposo* del sistema (1′).

Para el caso del punto de reposo, las definiciones de estabilidad e inestabilidad se pueden formular así:

el *punto de reposo* $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es *estable según Liapúnov*, si para cualquier $\varepsilon > 0$ es posible hallar un $\delta > 0$ tal que cualquier solución $x_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, cuyos datos iniciales $x_{i0} = x_i(t_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ satisfacen a la condición

$$|x_{i0}| < \delta \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (2')$$

se verifica la desigualdad

$$|x_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (3')$$

para todos los valores $t \geqslant t_0$.

La significación geométrica para $n = 2$ es la siguiente:

Por muy estrecho que sea el cilindro de radio ε con el eje Ot, existe en el plano $t = t_0$ un entorno del punto $(0, 0, t_0)$, de amplitud 2β, tal que todas las curvas integrales

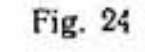


Fig. 24

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(t) \\ x_2 &= x_2(t) \end{aligned}\right\},$$

que salen de este entorno se mantienen dentro de este cilindro para todos los valores $t \geqslant t_0$ (véase la fig. 24).

Si, además de la desigualdad (3), se cumple también la condición $\lim\limits_{t\to\infty}|x_i(t)| = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ la *estabilidad* se llama *asintótica.*

Si para valores de $\delta > 0$ arbitrariamente pequeños no se cumple la condición (3') al menos para una solución $x_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, el *punto de reposo* del sistema $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es *inestable*.

Ejemplo. Partiendo de la definición de estabilidad según Liapunov, aclarar si es estable o no lo es, la solución del sistema

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x, \tag{1}$$

que satisface a las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Solución. La solución del sistema (1) que satisface a las condiciones iniciales dadas es: $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$.

Cualquier solución de este sistema que satisfaga a las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ tendrá la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos t - y_0 \operatorname{sen} t, \\ y(t) &= x_0 \operatorname{sen} t + y_0 \cos t. \end{aligned} \tag{4}$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrariamente y mostremos que existe un número $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, siendo

$$\begin{aligned} |x_0 - 0| &< \delta, \\ |y_0 - 0| &< \delta, \end{aligned}$$

se verifican las desigualdades

$$\begin{aligned} |x(t) - 0| &= |x_0 \cos t - y_0 \operatorname{sen} t| < \varepsilon, \\ |y(t) - 0| &= |x_0 \operatorname{sen} t + y_0 \cos t| < \varepsilon \end{aligned} \tag{5}$$

para todos los valores $t \geqslant 0$.

En virtud de la definición, esto significará que la solución nula $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ del sistema (1) es estable según Liapunov.

Se tiene, evidentemente,

$$\begin{aligned} |x_0 \cos t - y_0 \operatorname{sen} t| &\leqslant |x_0 \cos t| + |y_0 \operatorname{sen} t| \leqslant |x_0| + |y_0| \\ |x_0 \operatorname{sen} t + y_0 \cos t| &\leqslant |x_0 \operatorname{sen} t| + |y_0 \cos t| \leqslant |x_0| + |y_0| \end{aligned} \tag{6}$$

para todos los valores t.

Por lo tanto, si $|x_0| + |y_0| < \varepsilon$, también será

$$\begin{aligned} |x_0 \cos t - y_0 \operatorname{sen} t| &< \varepsilon \\ |x_0 \operatorname{sen} t + y_0 \cos t| &< \varepsilon \end{aligned} \tag{7}$$

para todos los valores t.

Por consiguiente, si por ejemplo se toma $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}$, entonces, siendo $|x_0|<\delta$ y $|y_0|<\delta$, en virtud de (6) se cumplirán las desigualdades (7) para todos los valores $t\geqslant 0$, es decir, que en efecto, la solución nula del sistema (1) es estable según Liapunov. No obstante, la estabilidad no es asintótica.

Basándose en la definición de estabilidad según Liapunov, estudiar la estabilidad de las soluciones de las siguientes ecuaciones y sistemas de ecuaciones:

843. $\frac{dx}{dt}=x+t, \quad x(0)=1.$

844. $\frac{dx}{dt}=2t(x+1), \quad x(0)=0.$

845. $\frac{dx}{dt}=-x+t^2, \quad x(1)=1,$

846. $\frac{dx}{dt}=2+t, \quad x(0)=1.$

847. $$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x-13y\\ \frac{dy}{dt}&=\frac{1}{4}x-2y\end{aligned}\right\}, \quad x(0)=y(0)=0.$$

848. $$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-x-3y\\ \frac{dy}{dt}&=x-y\end{aligned}\right\} \quad x(0)=y(0)=0.$$

2 TIPOS ELEMENTALES DE PUNTOS DE REPOSO

Sea dado un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=a_{11}x+a_{12}y\\ \frac{dy}{dt}&=a_{21}x+a_{22}y\end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

donde se supone

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0.$$

El punto $x=0$, $y=0$, en el que se anulan los segundos miembros de las ecuaciones del sistema (1), se llama punto de reposo del sistema (1) o punto singular.

Para estudiar los puntos de reposo del sistema (1) hay que formar la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (2)$$

y hallar sus raíces λ_1 y λ_2.

Son posibles los casos siguientes:

I. Las raíces λ_1 y λ_2 de la ecuación característica (2) son reales y distintas:

a) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Punto de reposo de estabilidad asintótica (nodo estable, fig. 25).

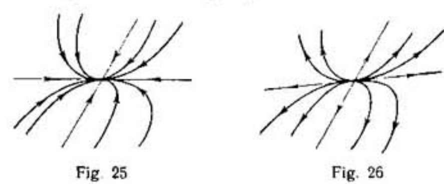


Fig. 25 Fig. 26

b) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Punto de reposo inestable (nodo inestable fig. 26).

c) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Punto de reposo inestable (punto de ensilladura, fig. 27).

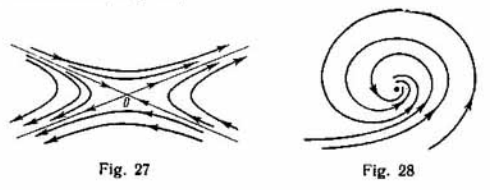


Fig. 27 Fig. 28

II. Las raíces de la ecuación característica (2) son imaginarias:

$$\lambda_1 = p + iq, \quad \lambda_2 = p - iq,$$

a) $p < 0$, $q \neq 0$. Punto de reposo de estabilidad asintótica (foco estable, fig. 28).

b) $p > 0$, $q \neq 0$. Punto de reposo inestable (foco inestable, fig. 29).

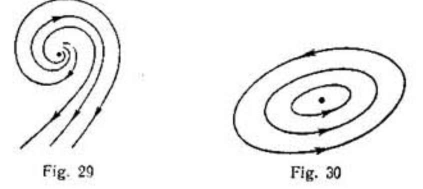


Fig. 29 Fig. 30

c) $p = 0$, $q \neq 0$. Punto de reposo estable (centro, fig. 30).

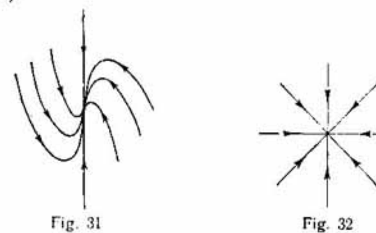


Fig. 31 Fig. 32

III. Las raíces son múltiples, $\lambda_1 = \lambda_2$:

a) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Punto de reposo de estabilidad asintótica (nodo estable, fig. 31, 32).

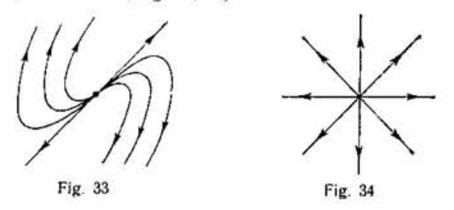


Fig. 33 Fig. 34

b) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. Punto de reposo inestable (nodo inestable, fig. 33, 34).

Ejemplo. Determinar el carácter del punto de reposo (0, 0) del sistema

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=5x-y\\ \frac{dy}{dt}&=2x+y\end{aligned}\right\}.$$

Solución. Formamos la ecuación característica

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & -1\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

o bien,

$$\lambda^2-6\lambda+7=0.$$

Sus raíces $\lambda_1=3+\sqrt{2}>0, \lambda_2=3-\sqrt{2}>0$, son reales, distintas y positivas. Por consiguiente, el punto de reposo (0, 0) es un nodo inestable.

Determinar el carácter de los puntos de reposo para los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

849. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=3x+y\\ \frac{dy}{dt}&=-2x+y\end{aligned}\right\}.$

850. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-x+2y\\ \frac{dy}{dt}&=x+y\end{aligned}\right\}.$

851. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-x+3y\\ \frac{dy}{dt}&=-x+y\end{aligned}\right\}.$

852. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-2x-y\\ \frac{dy}{dt}&=3x-y\end{aligned}\right\}.$

853. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=3x+7y\\ \frac{dy}{dt}&=2x+5y\end{aligned}\right\}.$

854. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-2x+\frac{5}{7}y\\ \frac{dy}{dt}&=7x-3y\end{aligned}\right\}.$

855. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=3x-y\\ \frac{dy}{dt}&=x+y\end{aligned}\right\}.$

856. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-x-y\\ \frac{dy}{dt}&=x-3y\end{aligned}\right\}.$

857. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=3x\\ \frac{dy}{dt}&=3y\end{aligned}\right\}.$

858. ¿Para qué valores de α es estable el punto de reposo (0, 0) del sistema que sigue?

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -3x + \alpha y\\ \frac{dy}{dt} &= 2x + y\end{aligned}\right\}.$$

Nota. Sea dado un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (n \geqslant 2). \tag{3}$$

Para este sistema subsisten tipos análogos de disposición de las curvas integrales alrededor del origen de coordenadas (punto de ensilladura generalizado, nodo generalizado, etc). En este caso, si las partes reales de todas las raíces de la ecuación característica del sistema (3) son negativas, el punto de reposo de este sistema $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es asintóticamente estable. Si, al menos para una raíz de la ecuación característica, la parte real es positiva, el punto de reposo es inestable.

Ejemplo. ¿Es estable el punto de reposo (0, 0, 0) del sistema que sigue?

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x + z\\ \frac{dy}{dt} &= -2y - z\\ \frac{dz}{dt} &= y - z\end{aligned}\right\}$$

Solución. Formamos la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1\\ 0 & -2-\lambda & -1\\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

o bien, $(1+\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda + 3) = 0$.

Las partes reales de las raíces de la ecuación característica $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ son negativas. Por consiguiente, el punto de reposo del sistema dado es asintóticamente estable.

3. ESTABILIDAD SEGUN LA PRIMERA APROXIMACION

Sea dado un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i=1, 2, \ldots, n) \qquad (1)$$

y sea $x_i \equiv 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ un punto de reposo del mismo, o sea,

$$f_i(0, 0, \ldots, 0)=0 \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Se supondrá que las funciones $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son diferenciables en el origen de coordenadas una cantidad suficiente de veces. Desarrollando las funciones f_i por la fórmula de Taylor, según las x_i, en un entorno del origen de coordenadas, resulta

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i=1, 2, \ldots, n), \qquad (2)$$

donde $a_{ij}=\frac{\partial f_i(0, 0, \ldots, 0)}{\partial x_j}$ y R_i son los términos infinitésimos de segundo orden con respecto a $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

En lugar del sistema (1) consideraremos el sistema

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i=1, 2, \ldots, n) \quad (a_{ij}=\text{const}), \qquad (3)$$

denominado sistema de ecuaciones de 1era aproximación para el sistema (1).

Subsiste lo siguiente:

1. Si las partes reales de todas las raíces de la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (4)$$

son negativas, las soluciones nulas $x_i \equiv 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ de los sistemas (3) y (2) son asintóticamente estables.

2. Si la parte real de al menos una raíz de la ecuación característica (4) es positiva, la solución nula del sistema (2) es inestable.

3. Si las partes reales de todas las raíces de la ecuación característica (4) no son positivas, siendo igual a cero la parte real de al menos una raíz, el estudio de la estabilidad según la primera aproximación es, por lo general, imposible (comienzan a influir los términos no lineales de R_i).

Ejemplo. Estudiar la estabilidad, según la primera aproximación, del punto de reposo $x=0$, $y=0$ del sistema

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y - 5y^2, \\ \dot{y} &= 3x + y + \frac{x^3}{2} \end{aligned}\right\}, \quad \left(\dot{x}=\frac{dx}{dt}, \quad \dot{y}=\frac{dy}{dt}\right). \tag{5}$$

Solución. El sistema de primera aproximación es

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y, \\ \dot{y} &= 3x + y; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

los términos no lineales satisfacen a las condiciones necesarias, pues su orden es $\geqslant 2$. Formamos la ecuación característica para el sistema (6):

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{o bien,} \quad \lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0. \tag{7}$$

Las raíces de la ecuación característica (7) $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ son reales y $\lambda_1 > 0$. Por consiguiente, la solución nula $x=0$, $y=0$ del sistema (5) es inestable.

Estudiar la estabilidad, según la primera aproximación, de la solución nula $x=0$, $y=0$ de los siguientes sistemas:

859. $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x + 2y - \operatorname{sen} y^2 \\ \dot{y} &= -x - 3y + x\left(e^{\frac{x^2}{2}} - 1\right) \end{aligned}\right\}.$

860. $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 3y + x^2 \operatorname{sen} y \\ \dot{y} &= -x - 4y + 1 - \cos y^2 \end{aligned}\right\}.$

861. $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -2x + 8 \operatorname{sen}^2 y \\ \dot{y} &= x - 3y + 4x^3 \end{aligned}\right\}.$

862. $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - 22 \operatorname{sen} y + x^2 - y^3 \\ \dot{y} &= \operatorname{sen} x - 5y + e^{x^2} - 1 \end{aligned}\right\}.$

863. $\left.\begin{array}{l}\dot{x}=-10x+4e^{y}-4\cos y^{2}\\ \dot{y}=2e^{x}-2-y+x^{4}\end{array}\right\}.$

864. $\left.\begin{array}{l}\dot{x}=7x+2\operatorname{sen} y-y^{4}\\ \dot{y}=e^{x}-3y-1+\frac{5}{2}x^{2}\end{array}\right\}.$

865. $\left.\begin{array}{l}\dot{x}=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2y-x^{3}y\\ \dot{y}=-y-2x+x^{4}-y^{7}\end{array}\right\}.$

866. $\left.\begin{array}{l}\dot{x}=\frac{5}{2}xe^{x}-3y+\operatorname{sen} x^{2}\\ \dot{y}=2x+ye^{-\frac{y^{2}}{2}}-y^{4}\cos x\end{array}\right\}.$

867. $\left.\begin{array}{l}\dot{x}=\frac{3}{4}\operatorname{sen} x-7y(1-y)^{\frac{1}{3}}+x^{3}\\ \dot{y}=\frac{2}{3}x-3y\cos y-11y^{5}\end{array}\right\}.$

868. $\left.\begin{array}{l}\dot{x}=\frac{1}{4}(e^{x}-1)-9y+x^{4}\\ \dot{y}=\frac{1}{5}x-\operatorname{sen} y+y^{14}\end{array}\right\}.$

869. $\left.\begin{array}{l}\dot{x}=5x+y\cos y-\frac{x^{3}}{3}\\ \dot{y}=3x+2y+\frac{x^{4}}{12}-y^{3}e^{y}\end{array}\right\}.$

4. ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES CON RESPECTO A LA VARIACION DE LOS SEGUNDOS MIEMBROS DE LAS ECUACIONES

Sean dadas las ecuaciones diferenciales

$$y'=f(x,\ y), \tag{1}$$

$$y'=f(x,\ y)+\theta(x,\ y), \tag{2}$$

donde las funciones $f(x, y)$ y $\theta(x, y)$ son continuas en un dominio G del plano XOY y la función $f(x, y)$ admite en este dominio derivada parcial continua $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Supongamos que en el dominio G

$$|\theta(x,\ y)|\leqslant\varepsilon. \tag{3}$$

Si $y=\varphi(x)$ e $y=\psi(x)$ son soluciones de las ecuaciones (1) y (2), respectivamente, que cumplen una misma condición inicial

$$\varphi|_{x=x_0}=\psi|_{x=x_0}=x_0,$$

entonces,

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{M}(e^{M|x-x_0|}-1), \tag{4}$$

donde $M=\max\limits_{(x,\,y)\in\bar{G}}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$.

De la acotación (4) se deduce que, si la perturbación de la función $\theta(x, y)$ que figura en el segundo miembro de la ecuación (1) es suficientemente peqeña en el dominio $\bar{G}$ la diferencia entre las soluciones de las ecuaciones (1) y (2) será pequeña en valor absoluto en un intervalo finito de variación de x.

Esto permite resolver aproximadamente ecuaciones diferenciales complicadas sustituyéndolas por ecuaciones elegidas racionalmente que se resuelvan con mayor facilidad.

Esta última circunstancia puede utilizarse esencialmente para la resolución de ecuaciones diferenciales ligadas con problemas de la física o de la técnica.

Ejemplo. Hallar en el cuadrado $Q\left\{-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2};\right.$ $\left.-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}\right\}$ la solución aproximada de la ecuación

$$y'=\operatorname{sen}(xy), \tag{1}$$

que cumple la condición inicial

$$y|_{x=0}=0{,}1, \tag{2}$$

y acotar el error.

S o l u c i ó n. Sustituyamos la ecuación (1) por la ecuación

$$y'=xy \tag{3}$$

$$y|_{x=0}=0{,}1. \tag{4}$$

La ecuación (3) con la condición inicial (4) tiene la solución

$$y=0{,}1\cdot e^{\frac{x^2}{2}},$$

que para todos los valores de $x \in \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$, no sale fuera del cuadrado fundamental Q.

En virtud del teorema de existencia y unicidad de la solución, la ecuación (1) con la condición inicial (2) admite una sola solución $y = \psi(x)$ y por solución aproximada del problema (1)—(2) se puede tomar $y = 0{,}1 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$, que representa la solución del problema (3)—(4).

Acotemos la diferencia

$$\Delta = |\varphi(x) - \psi(x)|, \quad \left(-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$$

donde $\varphi(x) = 0{,}1 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$ es la solución del problema (3)—(4). En el caso considerado $f(x, y) = xy$, por lo cual,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |x| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Según la fórmula de Taylor,

$$|\operatorname{sen} z - z| \leqslant \frac{|z|^3}{6}.$$

Por consiguiente, en el cuadrado Q se tiene:

$$|\operatorname{sen} xy - xy| \leqslant \frac{|xy|^3}{6} < \frac{1}{4^3 \cdot 6} = \frac{1}{384}.$$

Utilicemos la cota (4) tomando $\varepsilon = \frac{1}{384}$, $M = \max\limits_{(x,y) \in Q} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \frac{1}{2}$. Resulta:

$$\Delta = |\varphi(x) - \psi(x)| \leqslant \frac{1}{192}\left(e^{\frac{1}{2}|x|} - 1\right) < \frac{1}{650},$$
$$x \in \left]-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right].$$

Fácilmente se observa que la solución $\psi(x)$ del problema (1)—(2) no sale fuera del cuadrado fundamental Q.

¿Cuanto se diferenciarán las soluciones de las ecuaciones dadas a continuación, si cumplen una misma condición inicial $y_{x=x_0} = y_0$ en los intervalos considerados $(x_0 = 0)$?

870. $y' = \frac{y}{1+x} + x^2$,

$$y' = \frac{y}{1+x} + x^2 + 0{,}01 \operatorname{sen} x \text{ en } [0,\ 1].$$

871. $y' = e^{-\frac{\operatorname{sen} y}{1+x^2}}$,

$$y' = e^{-\frac{\operatorname{sen} y}{1+x^2}} + \frac{\cos xy}{10(4+x^4)} \quad \text{en } [0,\ 2].$$

872. $y' = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} xy$,

$$y' = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} xy + 0{,}001 e^{-x^2} \quad \text{en } [0,\ 1].$$

3. CRITERIO DE ROUTH-HURWITZ

Sea dada una ecuación diferencial lineal de coeficientes reales constantes

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \qquad (1)$$
$$(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n = \text{const},\quad a_0 > 0$$

La solución nula $y \equiv 0$ de la ecuación (1) es asintóticamente estable, cuando las partes reales de todas las raíces de la ecuación característica

$$f(\lambda) \equiv a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (2)$$

son negativas.

Criterio de Routh — Hurwitz. Para que las partes reales de todas las raíces de la ecuación (2) sean negativas es necesario y suficiente que sean positivos todos los menores principales diagonales de la matriz de Hurwitz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots a_n \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

La matriz de Hurwitz se compone del modo siguiente: En la diagonal principal se escriben los coeficientes del polinomio (2), comenzando por a_1 y terminando por a_n.

Las columnas, una tras otra, constan de los coeficientes de subíndices solamente impares o de subíndices solamente pares. Entre estos últimos va incluido el coeficiente a_0. Todos los demás elementos de la matriz, corres-

pondientes a subíndices mayores que n o menores que cero, se suponen iguales a cero.

Los menores diagonales principales de la matriz de Hurwitz son de la forma

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}.$$

Por lo tanto, la condición de Hurwitz dice: para que la solución $y \equiv 0$ de la ecuación (1) sea estable, es necesario y suficiente que se cumplan las relaciones:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0. \qquad (4)$$

Como $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$, la condición $\Delta_n > 0$ puede sustituirse por $a_n > 0$.

Ejemplo. Estudiar la estabilidad de la solución nula de la ecuación

$$y^{IV} + 5y''' + 13y'' + 19y' + 10y = 0. \qquad (5)$$

Solución. Formamos la ecuación característica

$$f(\lambda) \equiv \lambda^4 + 5\lambda^3 + 13\lambda^2 + 19\lambda + 10 = 0.$$

Aquí, $a_0 = 1$, $a_1 = 5$, $a_2 = 13$, $a_3 = 19$, $a_4 = 10$. Escribimos los menores diagonales de Hurwitz

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 13 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 19 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 4240 > 0.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 19 & 13 & 5 \\ 0 & 10 & 19 \end{vmatrix} = 424 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 13 \end{vmatrix} = 46 > 0,$$

$$\Delta_1 = 5 > 0.$$

Ha resultado que $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 > 0$. Por consiguiente, la solución trivial $y \equiv 0$ de la ecuación (5) es asintóticamente estable.

Los cálculos se pueden efectuar del modo siguiente. Formamos primero el menor superior de Hurwitz Δ_n, después de lo cual fácilmente se escriben todos los menores inferiores $\Delta_{n-1}, \ldots, \Delta_1$. Ahora se pueden calcular sucesivamente Δ_1, Δ_2, etc. Si aparece un menor negativo, la solución es inestable y el cálculo ulterior es superfluo.

Estudiar la estabilidad de la solución nula de las siguientes ecuaciones:

873. $y''' - 3y' + 2y = 0$.

874. $y^{IV} + 4''' + 7y'' + 6y' + 2y = 0$.

875. $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$.

876. $y^{IV} - 2y''' + y'' + 2y' - 2y = 0$.

877. $y^{IV} + 7y''' + 17y'' + 17y' + 6y = 0$.

878. $y''' - 3y'' + 12y' - 10y = 0$.

879. $y^{IV} + 5y''' + 18y'' + 34y' + 20y = 0$.

880. $y^{IV} + 7y''' + 19y'' + 23y' + 10y = 0$.

881. $y^{IV} + 11y''' + 41y'' + 61y' + 30y = 0$.

882. $y^{V} + 3y^{IV} - 5y''' - 15y'' + 4y' + 12y = 0$.

883. $y^{V} + 7y^{IV} + 33y''' + 88y'' + 122y' + 60y = 0$.

¿Para qué valores de α será estable la solución nula de las siguientes ecuaciones?

884. $y''' + 2y'' + \alpha y' + 3y = 0$.

885. $y^{IV} + \alpha y''' + 2y'' + y' + 3y = 0$.

886. $y^{IV} + 2y''' + \alpha y'' + y' + y = 0$.

¿Para qué valores de α, β será estable la solución nula de las siguientes ecuaciones?

887. $y''' + \alpha y'' + \beta y' + y = 0$.

888. $y^{IV} + 3y''' + \alpha y'' + 2y' + \beta y = 0$.

6. CRITERIO GEOMETRICO DE ESTABILIDAD (CRITERIO DE MIJAILOV)

Sea dada una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden de coeficientes reales constantes

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0. \quad (1)$$

Su ecuación característica es:

$$f(\lambda) \equiv a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2)$$

El criterio de Mijáilov permite resolver el problema de la disposición de las raíces de la ecuación característica (2) en el plano complejo y, por consiguiente, el problema de la estabilidad de la solución nula de la ecuación (1).

Haciendo $\lambda = i\omega$, resulta

$$f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega), \quad (3)$$

donde

$$\left.\begin{array}{l} u(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots \\ v(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots \end{array}\right\}. \quad (4)$$

La magnitud $f(i\omega)$, estando fijado el valor del parámetro ω, se puede representar en el plano complejo u, v en forma de un vector con el origen en el origen de coordenadas.

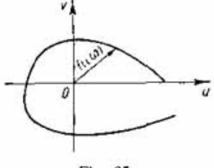


Fig. 35

Al variar ω en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, el extremo de este vector describirá una curva que lleva el nombre de Mijáilov (fig. 35).

Como la función $u(\omega)$ es par, la curva de Mijáilov es simétrica con respecto del eje Ou, por lo cual, es suficiente trazar la parte de la curva que corresponde a la variación del parámetro ω desde 0 hasta $+\infty$.

Si el polinomio $f(\lambda)$, de grado n, tiene m raíces con la parte real positiva y $n-m$ raíces con la parte real negativa, el ángulo de rotación φ del vector $f(i\omega)$, al variar ω desde 0 hasta $+\infty$, es igual a $\varphi = (n-2m)\frac{\pi}{2}$.

Está claro que para la estabilidad de la solución de la ecuación (1) es necesario y suficiente que sea $m = 0$.

Criterio de Mijáilov. Para que la solución nula $y \equiv 0$ de la ecuación (1) sea estable, es necesario y suficiente que, al variar ω desde 0 hasta $+\infty$:

1) el vector $f(i\omega)$ efectúe una rotación en un ángulo $\varphi = n\frac{\pi}{2}$, o sea, que dé $\frac{n}{4}$ vueltas en dirección *contraria* a la de las agujas de un reloj,

2) el hodógrafo de $f(i\omega)$ no pase por el origen (0, 0).

De aquí se deduce que, para que la solución de la ecuación (1) sea estable, *es necesario* que todas las raíces de las ecuaciones

$$u(\omega) = 0, \quad v(\omega) = 0$$

sean reales y se alternen entre sí, es decir, que entre cualquier par de raíces de una ecuación haya una raíz de la otra.

Ejemplo. Estudiar la estabilidad de la solución nula $y \equiv 0$ de la ecuación

$$y^{IV} + y''' + 4y'' + y' + y = 0.$$

Solución. Formamos la ecuación característica

$$f(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda + 1.$$

Se tiene,

$$f(i\omega) = \omega^4 - i\omega^3 - 4\omega^2 + i\omega + 1,$$

$$u(\omega) = \omega^4 - 4\omega^2 + 1,$$

$$v(\omega) = -\omega^3 + \omega = \omega(1-\omega)(1+\omega).$$

Trazamos la curva

$$\left.\begin{array}{l} u = u(\omega) \\ v = v(\omega) \end{array}\right\}, \quad 0 \leqslant \omega < +\infty$$

ω	0	$\sqrt{2-\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{2+\sqrt{3}}$
u	1	0	-2	0
v	0	+	0	−

$$\lim_{\omega \to +\infty} \frac{v}{u} = 0$$

(Véase la fig. 36).

El ángulo de rotación del radio vector $\varphi = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = (n - 2m)\frac{\pi}{2}$. De aquí que $n - 2m = 4$ y como $n = 4$, se tiene $m = 0$, o sea, todas las raíces de la ecución característica están situadas en el semiplano de la izquierda, por lo cual, la solución trivial $y \equiv 0$ es asintóticamente estable.

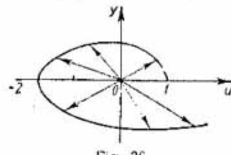


Fig. 36

Aplicando el criterio de Mijáilov, estudiar la estabilidad de la solución nula de las siguientes ecuaciones:

889. $2y''' + 7y'' + 7y' + 2y = 0.$

890. $y''' + 2y'' + 2y' + y = 0.$

891. $2y^{IV} + 13y''' + 28y'' + 23y' + 6y = 0.$

892. $3y^{IV} + 13y''' + 19y'' + 11y' + 2y = 0.$

893. $2y^{IV} + 6y''' + 9y'' + 6y' + 2y = 0.$

894. $y^{IV} + 4y''' + 16y'' + 24y' + 20y = 0.$

895. $y^{V} + 13y^{IV} + 43y''' + 51y'' + 40y' + 12y = 0.$

896. $y''' + y = 0.$

897. $y^{IV} + y''' + y' + y = 0.$

898. $y^{V} + 3y^{IV} + 2y''' + y'' + 3y' + 2y = 0.$

899. $y^{V} + y^{IV} + y''' + y'' + y' + y = 0.$

900. $2y^{IV} + 11y''' + 21y'' + 16y' + 4y = 0.$

901. $y^{VI} + y^{V} + y^{IV} + y'' + y' + y = 0.$

902. $2y^{IV} + 9y''' + 32y'' + 54y' + 20y = 0.$

903. $6y^{IV} + 29y''' + 45y'' + 24y' + 4y = 0.$

904. $y^{V} + y^{IV} + 2y''' + 2y'' + 2y' + 2y = 0.$

905. $y^{VI} + y^{V} + 3y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 2y' + 2y = 0.$

906. $y^{V} + 2y^{IV} + y''' + 2y'' + y' + 2y = 0.$

§ 20. ECUACIONES CON UN PARAMETRO PEQUEÑO EN LA DERIVADA

Sea dada la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = F(t,\ x(t),\ \varepsilon), \tag{1}$$

donde ε es un parámetro.

Si, en un recinto cerrado de variación de t, x, ε, la función $F(t,\ x,\ \varepsilon)$ es continua con respecto al conjunto de sus argumentos y satisface a las condiciones de Lipschitz con respecto a x:

$$|F(t,\ x_2,\ \varepsilon) - F(t,\ x_1,\ \varepsilon)| \leqslant N\,|x_2 - x_1|,$$

donde N no depende de t, x, ε la solución de la ecuación (1) es una función continua de ε.

En muchos problemas de la física aparecen ecuaciones de la forma

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = f(t,\ x), \tag{2}$$

donde ε es un parámetro pequeño.

Dividiendo por ε ambos miembros de la ecuación (2), ésta se reduce a la forma

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}f(t,\ x), \tag{3}$$

de donde se ve que el segundo miembro de (3) es discontinuo para $\varepsilon = 0$, por lo cual no se puede aplicar ya el teorema sobre la dependencia continua de las soluciones del parámetro ε.

El problema se plantea así: ¿Cuáles son las condiciones para que se pueda despreciar el término $\varepsilon\frac{dx}{dt}$ en la ecuación (2), para valores pequeños de $|\varepsilon|$, y como aproximación a la solución de la ecuación diferencial (2) se pueda considerar la denominada "ecuación degenerada"

$$f(t,\ x) = 0? \tag{4}$$

Para precisar, supongamos que $\varepsilon > 0$ y que la ecuación degenerada (4) tiene solamente una solución

$$x = \varphi(t).$$

En dependencia del comportamiento de $f(t, x)$ en las proximidades de la solución $x = \varphi(t)$ de la ecuación (4), la solución $x(t, \varepsilon)$ de la ecuación diferencial (2) para $\varepsilon \to 0$, o bien tiende a la solución $x = \varphi(t)$ de la ecuación degenerada, o bien se aleja rápidamente de ella.

En el primer caso, la solución $x = \varphi(t)$ de la ecuación (4) se llama estable; en el segundo, inestable. Precisando, si al pasar por la gráfica de la solución $x = \varphi(t)$ de la ecuación degenerada (4), la función $f(t, x)$, al crecer x, estando fijado t, cambia el signo de $+$ a $-$, la solución $x = \varphi(t)$ de la ecuación degenerada es estable y puede sustituir aproximadamente a la solución $x(t, \varepsilon)$ de la ecuación (2) (fig. 37).

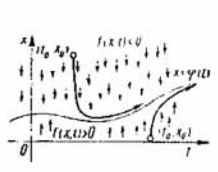


Fig. 37

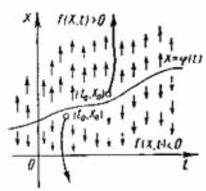


Fig. 38

Si la función $f(t, x)$ cambia el signo de $-$ a $+$, la solución $x = \varphi(t)$ de la ecuación degenerada (4) es inestable y sustituir la solución $x(t, \varepsilon)$ de la ecuación diferencial (2) por la solución de la ecuación degenerada (4) es imposible (fig. 38).

Condiciones suficientes:

I. Si $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} < 0$ en la solución $x = \varphi(t)$ de la ecuación degenerada (4), ésta es estable.

II. Si $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} > 0$ en la solución $x = \varphi(t)$ de la ecuación degenerada (4), ésta es inestable.

Si la ecuación degenerada (4) tiene unas cuantas soluciones $x = \varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, se debe estudiar la

estabilidad de cada una de ellas mediante los criterios I y II expuestos.

En este caso, el comportamiento de las curvas integrales de la ecuación diferencial (2) cuando $\varepsilon \to 0$ puede ser distinto y depende de la elección de las condiciones iniciales (del punto inicial (t_0, x_0)).

Es posible también el caso semiestable, cuando al pasar por la curva $x = \varphi(t)$ la función $f(t, x)$ no cambia de signo (por ejemplo, si $x = \varphi(t)$ es una raíz múltiple de orden par de la ecuación degenerada (4)).

En este caso, para valores pequeños de ε, las curvas integrales de la ecuación (2) tienden a la curva $x = \varphi(t)$ por una parte de la misma, mientras que por la otra, se alejan de ella. En el primer caso, se dice que el punto inicial (t_0, x_0) pertenece al campo de atracción de la solución semiestable $x = \varphi(t)$; en el segundo, que pertenece al campo de repulsión.

Por regla general, en el caso semiestable no se puede sustituir la solución de la ecuación inicial (2) por la solución de la ecuación degenerada (4). Se pueden indicar unos criterios cuando las curvas integrales de la ecuación (2), con una adecuada elección del punto inicial (t_0, x_0), se aproximan a la solución $x = \varphi(t)$ de la ecuación degenerada y se mantienen en un entorno de ella para $t > t_0$. Pero esto es justo sólo cuando no hay perturbaciones de la ecuación (2).

He aquí estos criterios.

Supongamos que en un entorno de la solución semiestable $x = \varphi(t)$ de la ecuación degenerada (4) la función $f(t, x) \geqslant 0$. Si $\varphi'(t) > 0$, las curvas integrales de la ecuación (2) que se aproximan a la curva $x = \varphi(t)$ no se pueden cortar con esta curva y se mantienen en un entorno de la misma para $t > t_0$ (el punto inicial (t_0, x_0) tiene que estar situado en el campo de atracción de la solución semiestable $x = \varphi(t)$; si (t_0, x_0) está situado en el campo de repulsión, la curva integral correspondiente de la ecuación (2) se aleja rápidamente de la curva $x = \varphi(t)$ (fig. 39). Si $\varphi'(t) < 0$, las curvas integrales que se aproximan a la gráfica de la función $x = \varphi(t)$ se cortarán con ésta, y por la otra parte de la curva $x = \varphi(t)$ se alejarán rápidamente de ella. Si $\varphi'(t) > 0$ para $t_0 \leqslant t < t_1$ y $\varphi'(t) < 0$ para $t > t_1$, entonces, siendo suficientemente pequeño ε, las curvas integrales que parten del punto

(t_0, x_0), perteneciente al campo de atracción de la raíz $x = \varphi(t)$, se mantienen próximas a la curva $x = \varphi(t)$ para $t_0 + \delta < t < t_1$, $\delta > 0$; en un entorno del punto $t = t_1$ éstas se cortan con la curva $x = \varphi(t)$ y después se alejan de ella.

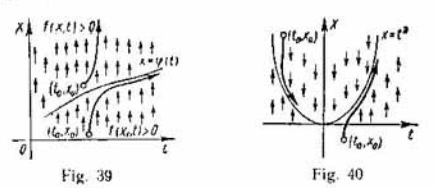


Fig. 39 Fig. 40

Si, en un entorno de la solución semiestable $x = \varphi(t)$; la función $f(t, x) \leqslant 0$, para que sean válidas las afirmaciones expuestas hay que sustituir los signos de la derivada $\varphi'(t)$ por los contrarios.

Ejemplo 1. Averiguar si la solución $x = x(t, \varepsilon)$ de la ecuación

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = t^2 - x, \tag{5}$$

$\varepsilon > 0$, que cumple la condición inicial $x|_{t=t_0} = x_0$, tiende a la solución de la ecuación degenerada $x = t^2$ cuando $t > t_0$ y $\varepsilon \to 0$.

Solución. Se tiene,

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial (t^2 - y)}{\partial x} = -1 < 0,$$

de modo que la solución de la ecuación degenerada $x = t^2$ es estable y, por consiguiente, la solución de la ecuación dada $x = x(t, \varepsilon)$, que parte de cualquier punto inicial (t_0, x_0), tiende a la solución de la ecuación degenerada cuando $\varepsilon \to 0$ y $t > t_0$ (fig. 40).

Puede uno convencerse de esto haciendo una prueba directa. Resolviendo la ecuación diferencial (5) como ecuación lineal no homogénea con la condición inicial dada $x|_{t=t_0} = x_0$, hallamos:

$$x(t, \varepsilon) = \left(x_0 - t_0^2 + 2\varepsilon t_0 - 2\varepsilon^2\right) e^{-\frac{t - t_0}{\varepsilon}} + t^2 - 2\varepsilon t + 2\varepsilon^2,$$

de donde directamente se observa que, siendo $t > t_0$, o sea, $t - t_0 > 0$,

$$x(t, \varepsilon) \to t^2 \text{ cuando } \varepsilon \to 0.$$

Ejemplo 2. Lo mismo para la ecuación

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = x(e^x - 2).$$

Aquí, la ecuación degenerada $x(e^x - 2) = 0$ tiene dos soluciones:

1) $x = 0$,

2) $x = \ln 2$.

Se tiene

$$\left.\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right|_{x=0} = (e^x - 2 + xe^x)\big|_{x=0} = -1,$$

de modo que la solución $x = 0$ es estable; pero

$$\left.\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right|_{x=\ln 2} = (e^x - 2 + xe^x)\big|_{x=\ln 2} = 2\ln 2 > 0,$$

de modo que la solución $x = \ln 2$ de la ecuación degenerada es inestable (fig. 41).

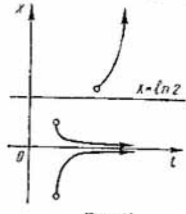


Fig. 41

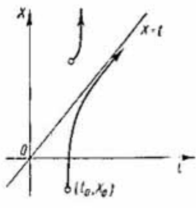


Fig. 42

Ejemplo 3.

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = (x - t)^2.$$

La ecuación degenerada $(x - t)^2 = 0$ tiene la raíz $x = t$ de segundo orden. Como en un entorno de esta raíz se tiene $f(t, x) \equiv (x - t)^2 > 0$, $\varphi(t) = t$ y $\varphi'(t) = 1 > 0$, la solución $x = t$ es semiestable, y si el punto (t_0, x_0) pertenece al semiplano que está situado bajo la recta $x = t$ (campo de atraccion de la raiz $x = t$), la curva integral

$x = x(t, \varepsilon)$ que parte del punto (t_0, x_0) se mantendrá para $t > t_0$ en un entorno de la linea $x = t$ (fig. 42).

Estudiar la estabilidad de las soluciones de las ecuaciones degeneradas para las siguientes ecuaciones diferenciales:

907. $\varepsilon \frac{dx}{dt} = x - t^2.$

908. $\varepsilon \frac{dx}{dt} = x(t^4 + 1 - x).$

909. $\varepsilon \frac{dx}{dt} = (x - t)(x - e^t).$

910. $\varepsilon \frac{dx}{dt} = x^2 - t^2.$

911. $\varepsilon \frac{dx}{dt} = xt.$

912. $\varepsilon \frac{dx}{dt} = (x - t)(\ln x - t^2 - 1).$

913. $\varepsilon \frac{dx}{dt} = (t + x)^2.$

914. $\varepsilon \frac{dx}{dt} = x - t + 1.$

§ 21. METODO OPERACIONAL Y SU APLICACION PARA LA RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1. LA TRANSFORMACION DE LAPLACE Y PROPIEDADES FUNDAMENTALES

EL OBJETO Y SU IMAGEN

Se llama *función-objeto* una función compleja de variable real $f(t)$ que cumple las siguientes condiciones:

1) $f(t) = 0$ para $t < 0$;

2) $f(t)$ es continua junto con sus derivadas de orden suficientemente grande en todo el eje t, a excepción de algunos puntos en los que $f(t)$ y sus derivadas tienen discontinuidades de primera especie, siendo finito el número de tales puntos en cada intervalo finito del eje t.

3) al aumentar t, el crecimiento del módulo de la función $f(t)$ no es superior al de alguna función exponencial, es decir existen unos números $M > 0$ y $s_0 \geqslant 0$, tales que

$$|f(t)| < Me^{s_0 t} \tag{1}$$

para todos los valores de t.

El número s_0 se llama *exponente de crecimiento* de la función $f(t)$. Se llama *imagen* de la función-objeto (según Laplace), la función $F(p)$ de variable compleja $p = s + i\sigma$ determinada por la fórmula

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt, \tag{2}$$

siendo $\operatorname{Re} p > s_0$, donde s_0 es el exponente de crecimiento de $f(t)$.

La condición (1) garantiza la existencia de la integral (2).

La transformación (2), que hace corresponder a cada función-objeto $f(t)$ su función-imagen $F(p)$, se llama *transformación de Laplace*, lo cual se anota escribiendo:

$$f(t) \risingdotseq F(p).$$

Subsiste el siguiente **teorema:**

Si $f(t) \risingdotseq F(p)$, en cualquiera de sus puntos de continuidad la función $f(t)$ se determina así:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp, \tag{3}$$

donde

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp = \lim_{b \to +\infty} \int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt} F(p)\, dp$$

(la fórmula (3) se denomina fórmula de inversión para la transformación de Laplace).

I. *Propiedad lineal.* Para cualesquiera constantes complejas α y β, se tiene

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteqdot \alpha F(p) + \beta G(p) \tag{4}$$

(aquí y a continuación se supondrá que $f(t) \doteqdot F(p)$, $g(t) \doteqdot G(p)$).

II. *Teorema de semejanza.* Para cualquier constante $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \tag{5}$$

III. *Derivación de la función-objeto.* Si $f'(t)$ es una función-objeto, se tiene

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0). \text{*)} \tag{6}$$

Generalización. Si $f(t)$ tiene derivadas continuas hasta el orden n en $(0, +\infty)$ siendo $f^{(n)}(t)$ función-objeto, se tiene

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0). \tag{7}$$

IV. *La derivación de la imagen* es equivalente a la multiplicación de la función-objeto por el argumento tomado con el signo menos, es decir,

$$F'(p) \doteqdot -tf(t). \tag{8}$$

Generalización.

$$F^{(n)}(p) \doteqdot (-1)^n t^n f(t). \tag{9}$$

V. *La integración de la función-objeto* se reduce a la división de la imagen por p:

$$\int_0^t f(t)\, dt \doteqdot \frac{F(p)}{p} \tag{10}$$

---

*) Aquí y a continuación, la notación $f(0)$ tiene el significado siguiente: $f(0) = f(+0) = \lim_{x \to 0+0} f(x)$. Del mismo modo, $f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$ son abreviaciones de los límites a la derecha correspondientes. *(Nota del T.)*

VI. *La integración de la imagen* es equivalente a la división de la función-objeto por t:

$$\int_p^\infty F(p)\,dp \risingdotseq \frac{f(t)}{t} \tag{11}$$

(se supone qne la integral $\int_p^\infty F(p)\,dp$ es convergente).

VII. *Teorema de la tardanza.* Para cualquier número positivo τ, se tiene:

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p). \tag{12}$$

VIII. *Teorema del desplazamiento* (multiplicación de la función-objeto por una función exponencial). Para cualquier número complejo λ, se tiene

$$e^{\lambda t}f(t) \risingdotseq F(p-\lambda). \tag{13}$$

IX. *Teorema del producto* (E. Borel). El producto de dos imágenes $F(p)$ y $G(p)$ es también una función-imagen, siendo

$$F(p)\,G(p) \risingdotseq \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau. \tag{14}$$

La integral que figura en el segundo miembro de (14) lleva el nombre de *convolución* de las funciones (factores) $f(t)$ y $g(t)$ y se denota por

$$(f*g)=\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau.$$

El teorema IX afirma que la *multiplicación de las imágenes es equivalente a la convolución de las funciones-objeto:*

$$F(p)\,G(p) \risingdotseq (f*g). \tag{15}$$

X. *Teorema de la imagen racional.* Para que la imagen $F(p)$ sea una función racional es necesario y suficiente que la función-objeto $f(t)$ sea una combinación lineal de funciones de la forma $t^m e^{\lambda t}$ (m es un número entero no negativo, λ es complejo).

XI. *Cálculo de la función-objeto cuando la imagen es una fracción racional.* Supongamos que $F(p)$ es una fracción racional propia, cuya descomposición en fracciones simples es:

$$F(p)=\sum_{k}\sum_{r=1}^{n_k}\frac{M_{kr}}{(p-p_k)^r}, \tag{16}$$

donde M_{kr} y p_k son unos números complejos. Entonces,

$$f(t)=\sum_{k}\sum_{r=1}^{n_k}\frac{M_{kr}t^{r-1}}{(r-1)!}e^{p_k t} \tag{17}$$

será una función-objeto cuya imagen es la función $F(p)$. En particular, si todos los polos de $F(p)$ son simples, se tiene:

$$f(t)=\sum_{k} M_k e^{p_k t}, \tag{18}$$

donde $M_k=\operatorname*{Res}_{p_k} F(p)$.

Si $F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}$ es una fracción racional, siendo el grado del polinomio $A(p)$ menor que el del polinomio $B(p)$ la función-objeto correspondiente a $F(p)$ es:

$$f(t)=\sum_{k}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}\{F(p)(p-p_k)^{n_k}e^{pt}\}, \tag{19}$$

donde p_k son los polos de $F(p)$, n_k son sus órdenes de multiplicidad y la suma se extiende a todos los polos.

En particular, si todos los polos de $F(p)$ son simples, la fórmula (19) se simplifica y toma la forma

$$f(t)=\sum_{k}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}. \tag{20}$$

Ejemplos:

1. Hallar la imagen de la función unidad de Heaviside (función salto unidad) $\eta(t)$ (fig. 43):

$$\eta(t)=\begin{cases}0 & \text{para } t<0\\ 1 & \text{para } t>0.\end{cases} \tag{21}$$

Solución. Según (2) y (21), si tiene:

$$\eta(t) \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt}\eta(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}\ (\mathrm{Re}\,p > 0).$$

Así, pues,

$$\eta(t) \doteqdot \frac{1}{p}. \tag{22}$$

2. Hallar la imagen de la función "escalera regular" (fig. 44).

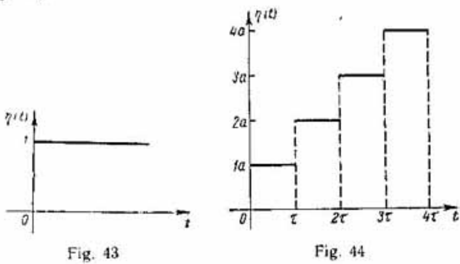


Fig. 43 Fig. 44

Solución. Se tiene $f(t) = a\{\eta(t) + \eta(t-\tau) + \eta(t-2\tau) + \ldots\}$. Por el teorema de la tardanza, resulta

$$f(t) \doteqdot a\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p}e^{-p\tau} + \frac{1}{p}e^{-2p\tau} + \ldots\right).$$

La expresión entre paréntesis es una progresión geométrica con la razón $q = e^{-p\tau}$. Como $|q| = |e^{-p\tau}| = e^{-s\tau} < 1$,, ésta es convergente y obtenemos

$$f(t) \doteqdot \frac{a}{p}\cdot\frac{1}{1-e^{-p\tau}}.$$

3. Hallar la imagen de la función $f(t) = e^{\lambda t}$, donde λ es un número complejo arbitrario.

Solución.

$$e^{\lambda t} \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt}e^{\lambda t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(p-\lambda)t}\,dt = \frac{1}{p-\lambda}$$

si $\operatorname{Re}(p-\lambda)>0$, o sea, si $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\lambda$. Así, pues,

$$e^{\lambda t} \doteqdot \frac{1}{p-\lambda}. \tag{23}$$

En particular, si $\lambda = 1$, se tiene

$$e^{t} \doteqdot \frac{1}{p-1},$$

y si $\lambda = -1$,

$$e^{-t} \doteqdot \frac{1}{p+1}.$$

4. Hallar la imagen de la función $f(t) = \operatorname{ch} t$.

Solución. Se tiene $\operatorname{ch} t = \frac{e^{t}+e^{-t}}{2}$.

Aplicando la propiedad lineal y los resultados del párrafo anterior, resulta

$$\operatorname{ch} t \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p+1}\right) = \frac{p}{p^2-1}. \tag{24}$$

5. Hallar la imagen de la función $f(t) = \operatorname{sen} \alpha t \cos \beta t$.

Solución. Como $\operatorname{sen} \alpha t \cdot \cos\beta t = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta)t + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)t]$, el problema se reduce a hallar la imagen de la función $\operatorname{sen} \omega t$.

Se tiene,

$$\operatorname{sen} \omega t = \frac{1}{2i}\left(e^{\omega t i} - e^{-\omega t i}\right) \doteqdot$$

$$\doteqdot \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-\omega i} - \frac{1}{p+\omega i}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \tag{25}$$

por lo cual,

$$\operatorname{sen} \alpha t \cos\beta t \doteqdot \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha+\beta}{p^2+(\alpha+\beta)^2} + \frac{\alpha-\beta}{p^2+(\alpha-\beta)^2}\right],$$

y después de unas transformaciones elementales, resulta definitivamente:

$$\operatorname{sen} \alpha t \cos\beta t \doteqdot \frac{\alpha\,(p^2+\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2+p^2)^2-4\alpha^2\beta^2}.$$

6. Hallar la función-objeto sabiendo que la imagen es

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}.$$

Solución. 1^er^ *método.* Aplicando el teorema del producto y la fórmula $\frac{1}{p^2+1} \doteqdot \operatorname{sen} t$, se tiene

$$\frac{1}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2+1} \doteqdot \int_0^t \operatorname{sen} \tau \operatorname{sen}(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t [\cos(2\tau - t) - \cos t]\, d\tau = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t).$$

2° *método.* Se sabe que $\operatorname{sen} t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}$. Por la fórmula de derivación de la imagen (8), tenemos:

$$-t \operatorname{sen} t \doteqdot \left(\frac{1}{p^2+1}\right)' = -\frac{2p}{(p^2+1)^2}.$$

De aquí, aplicando la fórmula (10) de integración de la función-objeto, resulta definitivamente

$$\frac{1}{(p^2+1)^2} \doteqdot \frac{1}{2} \int_0^t t \operatorname{sen} t\, dt = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t).$$

3^er^ *método.* Según la fórmula (19),

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}\, dp}{(p^2+1)^2} = \sum_{p_k} \operatorname{Res} \frac{e^{p_k t}}{(p_k^2+1)^2}$$

donde la suma se extiende a todos los polos de la función $\frac{e^{pt}}{(p^2+1)^2}$, teniendo en cuenta sus órdenes de multiplicidad.

En el caso considerado, los polos son: $p_1 = i$, $p_2 = -i$, ambos de segundo orden, es decir, $n_1 = 2$ y $n_2 = 2$, de modo que:

$$\operatorname{Res} \frac{e^{p_1 t}}{(p_1^2+1)^2} = \lim_{p\to i} \frac{d}{dp}\left[\frac{(p-i)^2 e^{pt}}{(p^2+1)^2}\right] = \lim_{p\to i} \frac{d}{dp}\left[\frac{e^{pt}}{(p+i)^2}\right] =$$

$$= \lim_{p\to i} \frac{(p+i)^2 te^{pt} - e^{pt} 2(p+i)}{(p+i)^4} = \lim_{p\to i} \frac{(p+i)t-2}{(p+i)^3} e^{pt} =$$

$$= \frac{1-it}{4i} e^{it}.$$

$$\operatorname{Res} \frac{e^{p_2 t}}{(p_1^2+1)^2} = -\frac{1+it}{4i} e^{-it}.$$

Por consiguiente,

$$f(t)=\operatorname{Res}\frac{e^{p_1 t}}{(p_1^2+1)^2}+\operatorname{Res}\frac{e^{p_2 t}}{(p_2^2+1)^2}=\frac{1}{2}(\operatorname{sen} t-t\cos t).$$

7. Hallar la función-objeto sabiendo que la imagen es

$$F(p)=\frac{1}{(p-1)^3(p^3+1)}.$$

Solución. Descomponemos $F(p)$ en fracciones simples:

$$F(p)=\frac{3}{8}\,\frac{1}{p-1}-\frac{3}{4}\,\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{(p-1)^3}-\frac{1}{24}\,\frac{1}{p+1}-\frac{1}{3}\,\frac{p-2}{p^2-p+1}.$$

Hallando la función-objeto para cada sumando, obtenemos:

$$f(t)=\frac{3}{8}e^t-\frac{3}{4}te^t+\frac{1}{4}t^2e^t-\frac{1}{24}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{3}e^{\frac{t}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

8. Hallar la función-objeto, si la imagen es:

$$F(p)=\frac{2p+3}{p^3+4p^2+3p}.$$

Solución. 1er *método.* Descomponemos $F(p)$ en fracciones simples:

$$F(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+3}.$$

Hallando la función-objeto para cada sumando, obtenemos:

$$f(t)=1-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}.$$

2° *método.* Apliquemos la fórmula (20).
Como los polos de la función $F(p)$

$$p_1=0,\quad p_2=-1,\quad p_3=-3,$$

son simples y

$$A(p)=2p+3, \quad B(p)=p^3+4p^2+3p,$$
$$B'(p)=3p^2+8p+3,$$

se tiene

$$f(t)=\frac{A(p_1)}{B'(p_1)}e^{p_1t}+\frac{A(p_2)}{B'(p_2)}e^{p_2t}+\frac{A(p_3)}{B'(p_3)}e^{p_3t}=$$
$$=1-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}.$$

En los siguientes ejercicios hay que hallar la imagen de la función-objeto dada:

915. t^2-2t+2.

916. t^3+4t^2+4t.

917. $(t-2)^3\,\eta(t-2)$.

918. $te^{-\alpha t}$.

919. $(t+2)\,te^t$.

920. $\operatorname{ch}^2 \alpha t$.

921. $(t-1)^2 e^{1-t}\,\eta(t-1)$

922. $e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$.

923. $e^{3t}\cos 3t\cos 4t$.

924. $e^{\lambda(t-\alpha)}\operatorname{sen}(t-\alpha)\,\eta(t-\alpha)$.

925. $e^{2t}\operatorname{sen}\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$.

926. $e^{\alpha t}\cos(t+\beta)$, $\beta>0$.

927. $\frac{\operatorname{sen} t}{t}$.

928. $e^{-\lambda t}\,\frac{\operatorname{sen} t}{t}$.

929. $\operatorname{sen} 5t\operatorname{sen} 2t$.

930. $\operatorname{sen}^2 2t$.

931. $t\operatorname{ch} t$.

932. $t\operatorname{sen} t$.

933. $\cos 2t\cos 4t$.

934. $\cos^2 4t$.

En los siguentes ejercicios están dadas las imágenes y hay que hallar las funciones-objeto correspondientes:

935. $\frac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

936. $\frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}$ (a es una constante).

937. $\frac{k!}{p^{k+1}}$.

938. $\frac{2}{(p-1)(p-3)}$.

939. $\frac{3p+19}{2p+8p+19}$.

940. $\frac{1}{(p^2+p+1)^2}$.

941. $\frac{1}{(p-1)^2(p+2)}$.

942. $\frac{2p^2-2\sqrt{2}p}{p^4-3p^2+2}$.

943. $\frac{1}{p^2+p+1}$.

944. $\frac{1}{p^4-1}$.

945. $\frac{pe^{-2p}}{p^2+4}$.

946. $\frac{e^{-\frac{p}{2}}}{p^2+9}$.

947. $\frac{p^3+9p^2+27p+25}{(p+1)^3(p+2)^2}$.

948. $\frac{2p+5}{p^2-6p+12}$.

949. $\frac{1}{p^4+2p^2-3}$.

950. $\frac{e^{-\frac{3}{2}p}}{p^2}$.

2. ECUACIONES LINEALES DE COEFICIENTES CONSTANTES

Sea dada una ecuación diferencial lineal de segundo orden de coeficientes constantes

$$x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=f(t), \qquad (1)$$

y las condiciones iniciales $x(0)=x_0$, $x'(0)=x_1$.

Se supondrá que la función $f(t)$ y la solución $x(t)$ junto con sus derivadas hasta el segundo orden son funciones-objeto. Hagamos las notaciones:

$$x(t) \doteqdot X(p), \quad f(t) \doteqdot F(p).$$

Para la ecuación (1) y las condiciones iniciales (2), la ecuación operacional tendrá la forma

$$(p^2+a_1p+a_2)X(p)=F(p)+x_0(p+a_1)+x_1. \qquad (3)$$

Resolviendo la ecuación (3), hallamos la solución operacional

$$X(p)=\frac{F(p)+x_0(p+a_1)+x_1}{p^2+a_1p+a_2}. \qquad (4)$$

Hallando la función-objeto para $X(p)$, obtenemos la solución de la ecuación (1) que cumple las condiciones iniciales (2).

Análogamente se puede resolver cualquier ecuación de n-ésimo orden de coeficientes constantes con las condiciones iniciales para $t = 0$.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación

$$x'' - 5x' + 4x = 4, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2.$$

Solución. Como $4 \doteqdot \frac{4}{p}$ y como, por la condición, $x_0 = x(0) = 0$ $x_1 = x'(0) = 2$, la ecuación operacional tendrá la forma

$$(p^2 - 5p + 4)\, X(p) = \frac{4}{p} + 2.$$

De aquí, hallamos la solución operacional

$$X(p) = \frac{2p + 4}{p\,(p^2 - 5p + 4)}.$$

Descomponemos el segundo miembro en fracciones simples:

$$X(p) = \frac{1}{p} - \frac{2}{p - 1} + \frac{1}{p - 4}.$$

Pasando a la función-objeto, obtenemos la solución buscada:

$$x(t) = 1 - 2e^t + e^{4t}.$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$x'' + 4x' + 4x = 8e^{-2t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$$

Solución. Como $8e^{-2t} \doteqdot \frac{8}{p + 2}$ y según la condición $x_0 = x_1 = 1$, la ecuación operacional tendrá la forma

$$(p^2 + 4p + 4)\, X(p) = \frac{8}{p + 2} + p + 4 + 1,$$

y, por consiguiente, la solución operacional será:

$$X(p) = \frac{p^2 + 7p + 18}{(p + 2)^3}.$$

Descomponiendo el segundo miembro en fracciones simples tendremos:

$$X(p)=\frac{8}{(p+2)^3}+\frac{3}{(p+2)^2}+\frac{1}{p+2}.$$

Pasando a la función-objeto, obtenemos la solución del problema planteado:

$$x(t)=4t^2e^{-2t}+3te^{-2t}+e^{-2t}.$$

Resolver las siguientes ecuaciones:

951. $x'+3x=e^{-2t}, \quad x(0)=0.$

952. $x'-3x=3t^3+3t^2+2t+1, \quad x(0)=-1,$

953. $x'-x=\cos t-\operatorname{sen} t, \quad x(0)=0.$

954. $x'+x=2\operatorname{sen} t, \quad x(0)=0.$

955. $2x'+6x=te^{-3t}, \quad x(0)=-\frac{1}{2}.$

956. $x''+4x'+3x=1, \quad x(0)=3, \quad x'(0)=-2.$

957. $x''-2x'+2x=1, \quad x(0)=\frac{1}{2}, \quad x'(0)=0.$

958. $x''-5x'+6x=12, \quad x(0)=2, \quad x'(0)=0.$

959. $x''+3x'-1=0, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=\frac{1}{3}.$

960. $x''-2x'+1=0, \quad x(0)=x'(0)=\frac{1}{2}.$

961. $x''+3x'+2x=2t^2+1, \quad x(0)=4, \quad x'(0)=-3.$

962. $x''-2x'-3x=3+7t+3t^2, \quad x(0)=x'(0)=-1.$

963. $x''-7x'=-(14t+5), \quad x(0)=2, \quad x'(0)=8.$

964. $x''+2x'=6t^2, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=\frac{3}{2}.$

965. $x''+6x'=t, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=-\frac{1}{36}.$

966. $x''+x=2e^t, \quad x(0)=1, \quad x'(0)=2.$

967. $7x''+14x'=\left(t-\frac{1}{4}\right)e^{-2t}, \quad x(0)=2, \quad x'(0)=-\frac{1}{56}.$

968. $x''-4x'+4x=(t-1)e^{2t}, \quad x(0)=0, \quad x'(0)=1.$

969. $4x''-4x'+x=e^{\frac{t}{2}}, \quad x(0)=-2, \quad x'(0)=0.$

970. $x'' + 3x' + 2x = e^{-t} + e^{-2t}$, $x(0) = 2$, $x'(0) = -3$.

971. $x'' - x' - 6x = 6e^{3t} + 2e^{-2t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = \frac{4}{5}$.

972. $x'' + 4x' + 4x = t^2e^{-2t}$, $x(0) = x'(0) = 0$.

973. $x'' - x' = 2 \operatorname{sen} t$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.

974. $x'' + 9x = 18 \cos 3t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 9$.

975. $x'' + 4x = 4 \cos 2t - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = \frac{1}{8}$.

976. $x'' + 2x' + 3x = t \cos t$, $x(0) = -\frac{1}{4}$, $x'(0) = 0$.

977. $x'' - 2x' + 10x = \cos 3t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = \frac{18}{37}$.

978. $x'' - 4x' + 5x = 2e^{2t} (\operatorname{sen} t + \cos t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

979. $x''' - x'' = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$, $x''(0) = 2$.

980. $x''' - 4x' = 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -\frac{1}{4}$, $x''(0) = 0$.

981. $x''' + x'' - 2x = 5e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = 2$.

982. $x'' + x = 8\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -4$.

983. $x'' + 4x = 2 \cos^2 t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

984. $x'' + x' = 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

3. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Supongamos que se necesita hallar la solución de un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x + b_1y + f_1(t) \\ \frac{dy}{dt} &= a_2x + b_2y + f_2(t), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

que cumple las condiciones iniciales

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \qquad (2)$$

Consideremos las imágenes de las funciones incógnitas, de sus derivadas y de las funciones $f_1(t)$, $f_2(t)$:

$$x(t) \doteqdot X(p), \qquad y(t) \doteqdot Y(p);$$
$$x'(t) \doteqdot pX(p) - x_0, \quad y'(t) \doteqdot pY(p) - y_0;$$
$$f_1(t) \doteqdot F_1(p), \qquad f_2(t) \doteqdot F_2(p)$$

y formemos el sistema operacional

$$\left.\begin{array}{l} pX(p) = a_1X(p) + b_1Y(p) + F_1(p) + x_0 \\ pY(p) = a_2X(p) + b_2Y(p) + F_2(p) + y_0 \end{array}\right\}. \qquad (3)$$

Este es un sistema algebraico lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas $X(p)$ e $Y(p)$. Resolviéndolo, se halla $X(p)$ e $Y(p)$, y pasando luego a las funciones-objeto se obtiene la solución $x(t)$, $y(t)$ del sistema (1) que cumple las condiciones iniciales (2). Análogamente se resuelven los sistemas lineales de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx_k}{dt} = \sum\limits_{l=1}^{n} a_{kl}x_l, \quad a_{kl} = \text{const}; \\ x_k(0) = x_k^0 \end{array}\right\} (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ejemplo. Hallar la solución del sistema

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y + 5 \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y - 37t \end{array}\right\}.$$

que cumple la condición inicial $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Solución. Como $5 \doteqdot \frac{5}{p}$, $-37t \doteqdot -\frac{37}{p^2}$ y $x_0 = y_0 = 0$, el sistema operacional tendrá la forma

$$\left.\begin{array}{l} pX(p) = -7X(p) + Y(p) + \dfrac{5}{p} \\ pY(p) = -2X(p) - 5Y(p) - \dfrac{37}{p^2} \end{array}\right\}.$$

Resolviéndolo, resulta

$$X(p) = \frac{5p^2 + 25p - 37}{p^2(p^2 + 12p + 37)}, \qquad Y(p) = \frac{-47p - 259}{p^2(p^2 + 12p + 37)}.$$

Descomponemos los segundos miembros en fracciones simples

$$X(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{p+6}{p^2+12p+37},$$

$$Y(p)=\frac{1}{p}-\frac{7}{p^2}-\frac{p+5}{p^2+12p+37}$$

o bien

$$X(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{p+6}{(p+6)^2+1},$$

$$Y(p)=\frac{1}{p}-\frac{7}{p^2}-\frac{p+6}{(p+6)^2+1}+\frac{1}{(p+6)^2+1}.$$

Pasando a las funciones-objeto se obtiene la solución buscada:

$$\left.\begin{aligned} x(t)&=1-t-e^{-6t}\cos t\\ y(t)&=1-7t-e^{-6t}\cos t+e^{-6t}\operatorname{sen} t\end{aligned}\right\}.$$

En los siguientes ejercicios hay que resolver los sistemas de ecuaciones por el método operacional:

985. $$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}+y=0\\ \frac{dy}{dt}+x=0\end{aligned}\right\},\quad x(0)=2,\ y(0)=0.$$

986. $$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}+x-2y=0\\ \frac{dy}{dt}+x+4y=0\end{aligned}\right\},\quad x(0)=y(0)=1.$$

987. $$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-y\\ \frac{dy}{dt}&=2(x+y)\end{aligned}\right\},\quad x(0)=y(0)=1.$$

988. $$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}+2y=3t\\ \frac{dy}{dt}-2x=4\end{aligned}\right\},\quad x(0)=2,\ y(0)=3.$$

989. $$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}+x=y+e^t\\ \frac{dy}{dt}+y=x+e^t\end{aligned}\right\},\quad x(0)=y(0)=1.$$

990. $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = y + e^t \\ 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2y = \cos t \end{aligned}\right\}, \quad x(0) = y(0) = 0.$

991. $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + y \\ \frac{dz}{dt} &= x + z \end{aligned}\right\}, \quad x(0) = 1, \ y(0) = 2, \ z(0) = 3.$

992. $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4y + z \\ \frac{dy}{dt} &= z \\ \frac{dz}{dt} &= 4y \end{aligned}\right\}, \quad x(0) = 5, \ y(0) = 0, \ z(0) = 4.$

993. $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + x + y + z = 0 \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x + z = 0 \\ \frac{dz}{dt} - 2\frac{dy}{dt} - y = 0 \end{aligned}\right\}, \quad x(0) = y(0) = 1, \ z(0) = -2,$

994. $\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} - 2x + 2y = 1 - 2t \\ \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + x = 0 \end{aligned}\right\}, \quad x(0) = y(0) = x'(0) = 0.$

995. $\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = y \\ \frac{d^2y}{dt^2} = x \end{aligned}\right\}, \ x(0) = y(0) = 1, \ x'(0) = 2, \ y'(0) = 0.$

996. $\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = x - 4y \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -x + y \end{aligned}\right\}, \quad x(0) = 2, \ y(0) = 0, \ x'(0) = -\sqrt{3}, \ y'(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

997. $\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = e^t - x \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 1 \end{aligned}\right\}, \quad x(0) = 1, \ y(0) = 0, \ x'(0) = 2, \ y'(0) = -1.$

998. $\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + x + y = 5 \\ &\frac{d^2y}{dt^2} - 4x - 3y = -3 \end{aligned}\right\},\quad x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0.$

999. $\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} + 4y + 2x = 4t + 1 \\ &\frac{dy}{dt} + x - y = \frac{3}{2}t^2 \end{aligned}\right\},\quad x(0) = y(0) = 0.$

1000. $\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} + y - 2x = 0 \\ &\frac{dy}{dt} + x - 2y = -5e^t \operatorname{sen} t \end{aligned}\right\}.\quad x(0) = 2,\ y(0) = 3.$

RESPUESTAS

33. Sí. **34.** No. **35.** Sí. **36.** No. **37.** Sí. **38.** Sí. **39.** No.

40. Véase la fig. 45.
41. Véase la fig. 46.
42. Véase la fig. 47.
43. Véase la fig. 48.
44. Véase la fig. 49.
45. Véase la fig. 50.
46. Véase la fig. 51.
47. Véase la fig. 52.
48. Véase la fig. 53.
49. Véase la fig. 54.
50. Véase la fig. 55.
51. Véase la fig. 56.

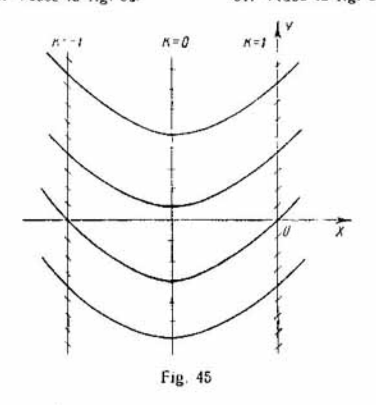


Fig. 45

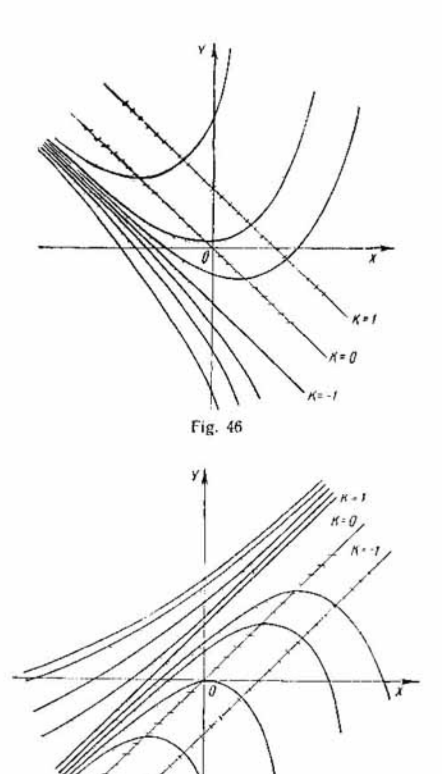


Fig. 46

Fig. 47

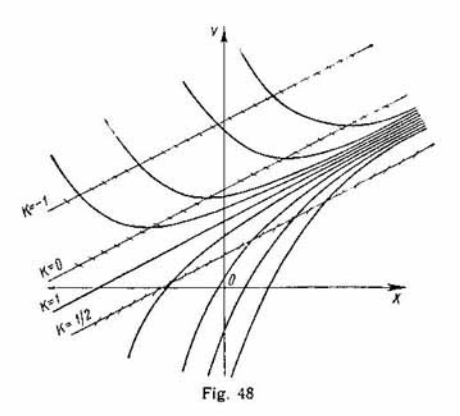


Fig. 48

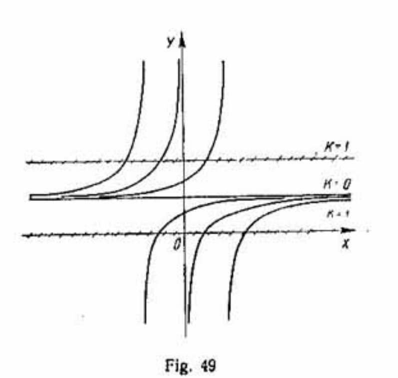


Fig. 49

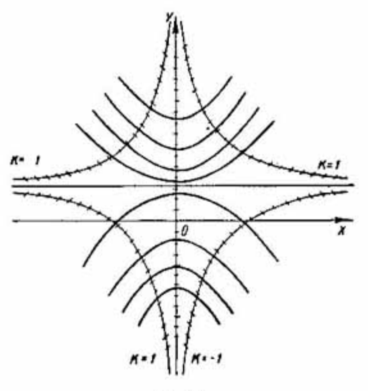


Fig. 50

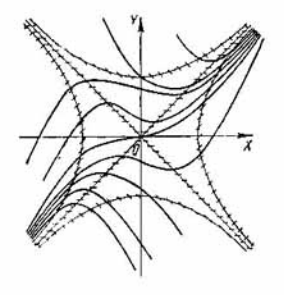


Fig. 51

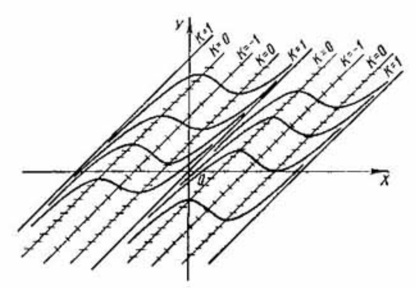


Fig. 52

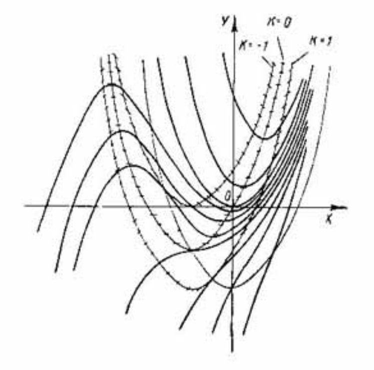


Fig. 53

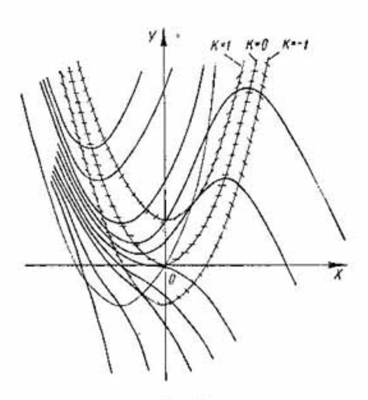


Fig. 54

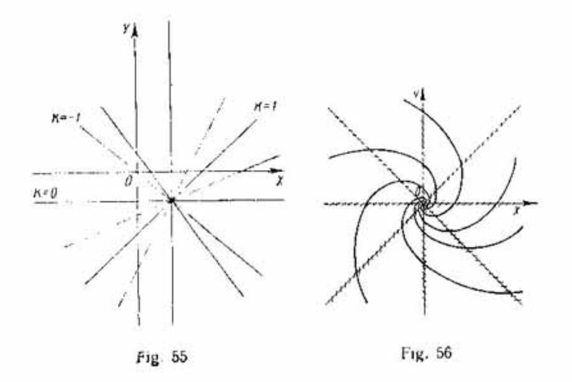


Fig. 55

Fig. 56

69. 2,337. 70. 20,77. 76. $y_0(x)=0$; $y_1(x)=\frac{1}{3}+\frac{x^3}{3}$; $y_2(x)=$ $=\frac{1}{126}(33-14x+42x^3-7x^4-2x^7)$. 77. $y_0(x)=0$, $y_1(x)=\frac{x^2}{2}$; $y_2(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{20}$. 78. $y_0(x)=1$; $y_1(x)=1+x+\frac{x^2}{2}$; $y_2(x)=$ $=1+x+x^2+\frac{x^3}{6}$. 79. $y_0(x)=2$; $y_1(x)=2+x-\frac{2}{3}x^3$; $y_2(x)=$ $=2+x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4$. 80. $y_0(x)=2$; $y_1(x)=2x-\ln x$; $y_2(x)=2+\ln^2 x$. 81. $x+y=C(1-xy)$. 82. $x^2(1+y^2)=C$. 83. $(x+y)(x-y-2)+2\ln\left|\frac{1+x}{1-y}\right|=C$. 84. $y=\operatorname{tg}\ln Cx$. 85. $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$. 86. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=1$; $y=1$. 87. $e^x=C(1-e^{-y})$. 88. $y=1$. 89. $a^x+a^{-y}=C$. 90. $1+e^y=$ $=C(1+x^2)$ 91. $(1+y)e^{-y}=\ln\frac{1+e^x}{2}+1-x$. 92. $\frac{1}{2}e^{2x}-e^y-$ $-\ln\sqrt{1+y^2}-\operatorname{arctg} y=C$. 93. $(x^2-2x+2)(y^2+1)e^{2\operatorname{arctg} y}=C$. 94. $x+C=\operatorname{ctg}\left(\frac{y-x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. 95. $b(ax+by+C)+a=Ce^{bx}$. 96. $x+y=a\operatorname{tg}\left(C+\frac{y}{a}\right)$. 97. $C+\frac{e^y}{y}=\ln|\ln x|$. 98. $\ln\frac{\sqrt{1+y^2}}{|y+\sqrt{1+y^2}|}=$ $=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$. 99. $2x^3y^3=3a^2x^2+C$. 100. $\frac{1}{1-xy}+\frac{1}{2}\ln x=C$.

101. $Cy^2=e^{xy-\frac{1}{xy}}$. 102. $3x^2-12x+2x^3y^3+6xy=C$. 103. $\frac{x^3}{3}-$ $-x^2+2x+\frac{y^3}{3x^3}-\frac{4y}{x}=C$. 104. $x=\frac{(x+y)^{n-m+1}}{n-m+1}+\frac{(x+y)^{p-m+1}}{p-m+1}+$ $+C\ (n-m\neq-1,\ p-m\neq-1)$. 105. $y^3=Cx-\ln x-1$ 106. $2x^2+(2x\ln y+1)^2=C$; $x=0$. 107. $y=a+\frac{Cx}{ax+1}$.

108. $y=a\cdot\operatorname{tg}\sqrt{\frac{a}{x}-1}$. 109. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right|=C-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}$, $y=2\pi k\ (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$. 110. $y'=3y$; $y=-2e^{3x}$.

111. $\int_0^x y\,dt=a^2\ln\frac{y}{a}$, $y=\frac{a^2}{a-x}$ (hipérbola). 112. $\frac{dv}{dt}=20\frac{t}{v}$; $v=\sqrt{725}\cdot 10$ cm/s. 114. $m\frac{dv}{dt}=kv^2$; $t=\frac{h(v_1-v_0)}{v_0v_1\ln\frac{v_1}{v_0}}=\frac{3}{40\ln 2{,}5}$ s.

115. $m\frac{dv}{dt}=-kv$; $t=-\frac{5\ln 10}{\ln 0{,}8}$ s. 117. $\frac{dT}{dt}=k(T-T_0)$ $T=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}=60$ min. 118. $y'=n\frac{y}{x}$; $y=Cx^n$. 119. $\frac{dS}{dt}=ks$;

$s=25\cdot 2^{\frac{t}{5}}$. **120.** 18,1 *kg*; $\frac{dx}{dt}=k\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{300}\right)$, donde k es el coeficiente de proporcionalidad. **121.** 5,2 *kg*; $\frac{dx}{dt}=kx\left(\frac{10-x}{90}-\frac{1}{3}\right)$. **122.** $xy=C$, $(C\neq 0)$. **123.** 0,82 *kg*; $\frac{ds}{dt}=ks(s+6)$. **124.** 32,2 min. **125.** $T=\frac{2}{3}x$; 864 000 cal; $\frac{dT}{dx}=-\frac{Q}{kA}$, donde $Q=\text{const}$. **128.** $y=0$, para $\alpha\leqslant 1$ la solución es única. **130.** $y=\frac{\pi}{2}(2n+1)x+C$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$. **131.** $y=C$. **132.** $y=(-1^n(x\operatorname{arc\,sen}x+\sqrt{1-x^2})+\pi nx+C$, $(n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$. **133.** $y=e^x+C$. **134.** $y=\pi nx+C$, $(n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$. **135.** $y=x(\ln x-1)+C$. **136.** $y=x\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\pi nx+C$, $(n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ **137.** $y=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{x}\right)+5\pi$. **138.** $y=\operatorname{arc\,ctg}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+3\pi$. **139.** $y=2\operatorname{arc\,tg}\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)+\frac{9}{2}\pi$. **140.** $y=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}x\right)+\frac{7}{2}\pi$. **141.** $y=0$. **142.** $y=1$. **143.** $y=-\pi$. **144.** $y=\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{2x}+\frac{9}{4}\pi$. **145.** $y^2-3xy+2x^2=C$. **146.** $2Cy=C^2x^2+1$; $y=\pm x$. **147.** $(x+y)(x^3+y^3)=C$. **148.** $(y-x)^8(y-2x)^9=C(y+2x)^5$. **149.** $C(y^2-x^2)=y^3$. **150.** $y^2=Cxe^{\frac{x^2}{y^2}}$. **151.** $y+\sqrt{y^2-x^2}=Cx^3e^{\frac{y(y+\sqrt{y^2-x^2})}{x^2}}$. **152.** $fy^3+3cxy^2+3bx^2y+ax^3=C$. **153.** $x^2=y^4+Cy^6$. **154.** $y^2=x\ln Cy^2$. **155.** $C^2x^2=1+2Cy$; $C^2-x^2=2Cy$. **156.** $(x-1)(3x+2y-1)=C$. **157.** $x+y+1=Ce^{\frac{2x+y}{3}}$. **158.** $(x+y-1)^5(x-y-1)^2=C$. **159.** $\sqrt{x^2y^4+1}=Cy^2x^2-1$. **160.** $y(x^2y-1)^2=C$. **161.** $\operatorname{arc\,tg}\frac{y^3}{x}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^6)+\ln C$. **162.** $x^2(x^2y+\sqrt{1+x^4y^2})=C$. **163.** $(y-2x+3)^3=C(y-x+1)^2$. **164.** $x+3y-\ln|x-2y|=C$. **165.** $y=1-x+Ce^{\frac{2x+2}{x+y-1}}$. **166.** $(x+y-1)^2+2x=C$. **167.** $\operatorname{sen}x+2y\ln|y|-Cy=0$. **168.** $x=Ce^{-\operatorname{sen}\frac{y}{x}}$. **169.** $C\sqrt{x^2+y^2}=y^2+2x^2$. **170.** $ye^{\sqrt{\frac{x}{y}}}=C$; $x=0$. **171.** $x^2+y^2=Cx$. **172.** $y=\frac{1}{2}\left(Cx^{1-k}-\frac{1}{C}x^{1+k}\right)$. **173.** Parábola $y^2=2Cx+C^2$. **174.** $y=\frac{1}{2}\left(Cx^2-\frac{1}{C}\right)$. **175.** $x^2+y^2=Cx^4$. **176.** $y=Ce^{-2x}+\frac{1}{4}(2x^2+2x-1)$. **177.** $y=C\sqrt{x^2+2x-1}+x$. **178.** $y=C\ln x+x^3$. **179.** $y=C\sqrt{|a^2-x^2|}+x$. **180.** $y=C\sqrt{x}+x^2$.

181. $y = C(x+1)^2 + \frac{1}{2}(x+1)^4$. 182. $x = 8\operatorname{sen}^2\frac{y}{2} + Ce^{-\cos y}$.

183. $y = (x^2+C)e^{x^2}$ 184. $y = \frac{Cx}{x^3+1} + \frac{1}{x}$. 185. $y = 2e^{-\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x - 1$. 186. $y = Cx\ln x + \sqrt{x}$. 187. $y^3 = Cx^2 + x^3$.

188. $y^4 = C\sqrt{x} + \sqrt{x+1}$. 189. $\frac{1}{x} = 2 - y^2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}$.

190. $y = e^{x+x^2} + Ce^x$. 191. $y = -x\cos x + Cx$. 192. $\frac{1}{y} = Ce^{x^2} + \frac{1}{x}$.

193. $x^2 + y^2 - a^2 = Cy$. 194. $\frac{1}{y^2} = C\operatorname{sen} x + x$. 195. $x^3 = Ce^y - y - 2$.

196. $\frac{1}{y} = C\sqrt{x^2+x+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$. 197. $y^3 = \frac{Cx}{x^2-a^2} + x^2$.

198. $\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(C - \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|\right)$.

199. $\frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}(x+1)^4 + C(x+1)^2$. 200. $y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = C$.

201. $x = y\ln y + \frac{C}{y}$. 202. $y = \frac{Cx}{x-1} + x^2$. 203. $y = \frac{x}{\cos x}$.

204. $\operatorname{sen} y = x + Ce^{-x}$. 205. $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = Ce^{-x} - x + 1$. 206. $y = (x+1)^n(C+e^x)$.

207. $\varphi(x) = Cx^{-\frac{n-1}{n}}$ 208. $\operatorname{tg} y = \left(C + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x^2}$ 209. $y = \operatorname{sen} x$.

210. $y = \cos\sqrt{x}$. 211. $y = 2^{\operatorname{sen} x}$. 212. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. 213. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

214. $y = \operatorname{arc\,tg} x$. 215. $y = e^{ex} + \cos\frac{1}{x}$. 216. $y = x^{-x}$.

217. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = C$. 218. $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$. 219. $\sqrt{x^2+y^2} + \ln|xy| + \frac{x}{y} = C$. 220. $x^3\operatorname{tg} y + y^4 + \frac{y^3}{x^2} = C$. 221. $x^3y + x^2 - y^2 = Cxy$.

222. $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{y} + \frac{x^2+y^2}{2} = C$. 223. $x^3 + y^3 - x^2 - xy + y^2 = C$.

224. $y\sqrt{1+x^2} + x^2y - y\ln|x| = C$. 225. $\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y}{x} = C$.

226. $x\operatorname{sen} y - y\cos x + \ln|xy| = C$. 227. $\operatorname{tg} xy - \cos x - \cos y = C$.

228. $y = x$. 229. $\operatorname{sen}(nx+my) + \cos(mx+ny) = C$.

230. $\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x^2+y^2} + \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{y} + e^{\frac{x}{y}} = C$. 231. $\operatorname{sen}\frac{y}{x} - \cos\frac{x}{y} + x - \frac{1}{y} = C$. 232. $(x^2+y^2)^2 + 2a^2(y^2-x^2) = C$. 233. $1 + y^2 - x^2 = Cx$. $\mu_1 = \frac{1}{(1+y^2-x^2)^2}$; $\mu_2 = \frac{1}{x^2}$. 234. $xy^2 - 2x^2y - 2 = Cx$.

235. $xy'(x^2+y^2) = C$. 236. $\frac{y-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = C$; $\mu = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

237. $x-\frac{y}{x}=C;\ \mu=\frac{1}{x^2}$. 238. $x\ln|x|-y^2=Cx;\ \mu=\frac{1}{x^2}$. 239. $5\operatorname{arc\,tg}x+2xy=C;\ x=0;\ \mu=\frac{1}{1+x^2}$. 240. $y^3+x^2(\ln x-1)=Cx^2;$ $\mu=\frac{1}{x^4}$. 241. $2e^x\operatorname{sen}y+2e^x(x-1)+e^x(\operatorname{sen}x-\cos x)=C;\ \mu=e^x$. 242. $x^2-\frac{7}{y}-3xy=C;\ \mu=\frac{1}{y^2}$. 243. $(x+y^2)^2\,C=x-y^2;$ $\mu=\frac{1}{(x+y^2)^3}$. 244. $y=\frac{x^3}{2}+C,\ y=Ce^x-x-1$. 245. $(y-C)^2=4Cx$. 246. $(y-C)^2=x^3$. 247. $\ln Cy=x\pm 2e^{\frac{x}{2}},\ y=0$. 248. $xy=C,\ x^2y=C$. 249. $y=\frac{C}{2}x^2+\frac{1}{2C},\ y=\pm x$. 250. $y=2x^2+C,\ y=-x^2+C$. 251. $4e^{-\frac{y}{3}}=(x+2)^{\frac{4}{3}}+C$. 252. $y=\frac{x^2}{2}+C,\ y=-\frac{x^2}{2}+C,\ y=Ce^x$.

253. $\left.\begin{array}{l}x=e^p(p+1)+C\\ y=p^2e^p\end{array}\right\};\ y=0$. 254. $\left.\begin{array}{l}x=\ln|\ln p|+\frac{1}{\ln p}+C\\ y=\frac{p}{\ln p}\end{array}\right\}$.

255. $\left.\begin{array}{l}x=\ln p+\operatorname{sen}p,\\ y=C+p(1+\operatorname{sen}p)+\cos p\end{array}\right\}$. 256. $\left.\begin{array}{l}x=p^2-2p+2\\ y+C=\frac{2}{3}p^3-p^2\end{array}\right\}$.

257. $\left.\begin{array}{l}x+c=\frac{(\ln p+1)^2}{2}\\ y=p\cdot\ln p\end{array}\right\}$. 258. $\left.\begin{array}{l}x+C=2\operatorname{arc\,tg}p-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-p^2}}{p}\right|\\ y=\operatorname{arc\,sen}p+\ln(1+p^2)\\ y=0.\end{array}\right\}$.

259. $\left.\begin{array}{l}x=e^p+C\\ y=(p-1)e^p\end{array}\right\};\ y=-1;$ 260. $\left.\begin{array}{l}x=\frac{e^{\frac{1}{p}}}{p^2}\\ y=C+e^{\frac{1}{p}}\left(1+\frac{1}{p}\right)\end{array}\right\}$.

261. $y+C=\pm\left(\sqrt{x-x^2}+\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}\right)$. 262. $\left.\begin{array}{l}x=a\cos^3 t\\ y+C=-a\operatorname{sen}^3 t\end{array}\right\},$ $(p=\operatorname{tg}t)$. 263. $\left.\begin{array}{l}x=5\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 t-\operatorname{tg}t+t\right)+C\\ y=a\operatorname{sen}^5 t\end{array}\right\}$

264. $\left.\begin{array}{l}x=-\frac{2}{t}+\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-2\operatorname{arc\,tg}t\\ y=\frac{t^2}{1-t^4}\\ (p=yt)\end{array}\right\}\ y=0.$

265. $\left.\begin{array}{l} x = p + \operatorname{sen} p \\ y + C = \frac{1}{2} p^2 + p \operatorname{sen} p + \cos p \end{array}\right\}$.

266. $\left.\begin{array}{l} x + C = \ln |p| + \operatorname{sen} p + p \cos p \\ y = p + p^2 \cos p \end{array}\right\}$. 267. $\left.\begin{array}{l} x = 2Cp - \ln p - 2 \\ y = Cp^2 - p \end{array}\right\}$.

268. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p} \\ y = \frac{2C}{p} + \ln p - 2 \end{array}\right\}$. 269. $\left.\begin{array}{l} x = 2(1-p) + Ce^{-p} \\ y = [2(1-p) + Ce^{-p}](1+p) + p^2 \end{array}\right\}$.

270. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{C}{p^2} - \frac{\cos p}{p^2} - \frac{\operatorname{sen} p}{p} \\ y = \frac{2C}{p} - \frac{2\cos p}{p} - \operatorname{sen} p \end{array}\right\}$; $y = 0$. 271. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{Cp^2 + 2p - 1}{2p^2(p-1)^2} \\ y = \frac{Cp^2 + 2p - 1}{2(p-1)^2} - \frac{1}{p} \end{array}\right\}$.

272. $\left.\begin{array}{l} x = \frac{C}{p^3} - 2e^p\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3}\right) \\ y = \frac{3C}{2p^2} - 2e^p\left(1 - \frac{3}{p} + \frac{3}{p^2}\right) \end{array}\right\}$. 273. $y = Cx + \frac{a}{C^2}$; $4y^3 = 27ax^2$. 274. $y = -\frac{x^2}{4}$; $y = Cx + C^2$. 275. $y = Cx - \frac{C-1}{C}$; $(y+1)^2 = 4x$. 276. $y = Cx + a\sqrt{1+C^2}$; $x^2 + y^2 = a^2$. 277. $y = Cx + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$; $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. 278. $x = Cy + C^2$; $4x = -y^2$. 279. $xy = \pm a^2$. 280. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. 281. $y + xy' = 0$. 282. $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$. 283. $xy' = y \ln y'$. 284. $y'^2 + y' - xy' + y = 0$. 285. $y'' - 2y' + y = 0$. 286. $yy'^2 + 2xy' - y = 0$. 287. $y''' = 0$. 288. $y''' + \frac{3}{x} y'' = 0$. 289. $y''^2 = (1 + y'^2)^3$. 290. $y'' - y = 0$. 291. $y'' + y = 0$. 292. $y^2 - 2bx = b^2$, $(b > 0)$. 293. $x^2 + ny^2 = C$. 294. $2x + ay^2 = C$. 295. $\operatorname{sen} y = be^{-x}$. 296. $y^2 = 2bx$. 297. $xy = C$. 298. $y = ax$, si $k = 2$; $\frac{1}{x^{k-2}} - \frac{1}{y^{k-2}} = \frac{1}{b^{k-2}}$, $k \neq 2$. 299. $x^2 + y^2 = 2bx$. 300. $xy^3 = b$. 301. $\rho = C(1 - \cos\varphi)$. 302. $y = Ce^{-\frac{x}{2}}$. 303. $y^2 = 4x + 4$. 304. $y = 0$. 305. $y = 0$, $y = \frac{4}{27}x^3$. 306. No hay soluciones singulares. 307. $a = 0$, $y = 0$. 308. $4y + x^5 = 0$. 309. $4xy^2 = -1$. 310. $y = x - \frac{4}{27}$. 311. No hay soluciones singulares. 312. $y = -\frac{x^2}{4}$. 313. $y = 0$. $y = 4x$. 314. $y = \pm 1$,

315. $y=\pm 2e^{\frac{x}{2}}$. 316. $y=x,\ y=-\frac{x}{3}$. 317. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
318. $x=ay^2+Cy\sqrt{1-y^2}$. 319. $y=x-\frac{x}{x+C}$. 320. $y=C\frac{\operatorname{sen} x}{x}+$
$+\cos x$. 321. $y^{1-n}=2\operatorname{sen} x+\frac{2}{n-1}+Ce^{(n-1)\operatorname{sen} x}$. 322. $x^4-6x^2y^2+$
$+y^4=C$. 323. $15x^2y-24xy^2-12x^3+2y^3=C$. 324. $6y+12y^3-$
$-9x^2y^2+2x^3=C$. 325. $2+xy\ln^2 x=Cxy$, $\mu=\frac{1}{x^2y^2}$. 326. $y=$
$=Ce^{-x^2}+(\operatorname{sen} x-x\cos x)\,e^{-x^2}$. 327. $(C-\ln|x|)(1-xy)=2$.
328. $x=Ce^{2y}+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}$. 329. $y+C=2x-\frac{x^2}{2}+2\ln\times$
$\times|1-x|$. 330. $x^4=Cy^2e^{\frac{1}{y}}+2y^2+2y+1$. 331. $y^2=Cx^2+x^4$.
332. $y(y-2x)^3=C(y-x)^2$. 333. $y=C(2x-1)+\frac{1}{x}$.
334. $x+y-1=Ce^{\frac{2x+2}{x+y-1}}$. 335. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{4}\right|=C-2\cos\frac{x}{2}$.
336. $y=C(3x^2-2x)+\frac{2}{x}$. 337. $y^3=Cx^3+x^4$. 338. $x+C=$
$=\frac{1}{a-b}\left\{ax+by+c-\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{b}{a}}\operatorname{tg}(ax+by)+c\right]\right\}$.
339. $x+ye^{\frac{x}{y}}=1+e$. 340. $\ln|x|-\frac{y^2}{2x^2}=C$. 341. $\ln|2x-2y+5|-$
$-2(x+y-2)=C$. 342. $x^2y+2x=Cy$. 343. $x^2+y^2=Ce^{-x}$.
344. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{y^2-y+1}-\sqrt{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right)=C$.
345. $x=y^2\left(1+Ce^{\frac{1}{y}}\right)$. 346. $\operatorname{sen} x+2y\ln|y|-Cy=0$. 347. $3e^{-2y}=$
$=Ce^{-2x}-2e^x$. 348. $x^4+y^2=C(x^2+y)$. 349. $\frac{1}{x}=\frac{C}{y^2}+\frac{y^n}{n+2}$,
$n\neq-2$. 350. $x\sqrt{1+x^2}+y\sqrt{1+y^2}+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+$
$+\ln|y+\sqrt{1+y^2}|=n\sqrt{1+n^2}+\ln|n+\sqrt{1+n^2}|$. 351. $\frac{3}{7}y-\frac{4}{7}x+$
$+\frac{1}{49}(4a^2-3b^2)\ln|7(x+y)+a^2+b^2|=C$. 352. $y^2-Cx^2=$
$=-\frac{bC}{1+aC}$. 353. $xe^{\frac{y^2}{x}}=C$. 381. $y=(x-3)e^x+\frac{x^2}{2}+2x+3$.
382. $y=\frac{x^5}{120}+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$. 383. $y=\frac{x^4}{24}\ln x-\frac{13}{288}x^4+$
$+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{9}+\frac{1}{32}$. 384. $y=\frac{x^4}{24}-\operatorname{sen} x+C_1x^2+C_2x+C_3$.

385. $y=-\frac{2x+3}{12(x+2)^2}+\frac{x^2-6x+20}{324}$. 386. $y+C_2=\frac{6}{5}(x+C_1)+$ $+\frac{5}{12}(x+C_1)^3$. 387. $y=(1+C_1^2)\ln|x+C_1|-C_1x+C_2$.

388. $\left.\begin{array}{l} x+C_1=\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{3}{4t^2} \\ y+C_2=\frac{1}{4}t+\frac{3}{4t^3} \end{array}\right\}$, $t=y''$.

389. $y=(C_1x-C_1^2)e^{\frac{x}{C_1}+1}+C_2$. 390. $y+C_2=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+C_1\right)\right|$.

391. $y=C_3+C_2x-\operatorname{sen}(x+C_1)$. 392. $\left.\begin{array}{l} x+C_2=z(2\ln z-1) \\ y+C_1=z^2\ln z \end{array}\right\}$, $z=y'$ 393. $\left.\begin{array}{l} x=z^2+1 \\ y=\frac{4}{15}z^5+C_1z^3C_2 \end{array}\right\}$, $z=y''$.

394. $y=C_1x(x-C_1)+C_2$; $y=\frac{x^3}{3}+C$.

395. $y=C_2\left(xe^{C_1x}-\frac{1}{C_1}e^{C_1x}\right)+C_3$. 396. $\left.\begin{array}{l} x+C_2=e^z(z+1) \\ y+C_1=z^2e^z \end{array}\right\}$, $z=y'$ 397. $y=\frac{2}{5}x^2\sqrt{2x}-\frac{16}{5}$. 398. $y=\operatorname{ch}(x+C_1)+C_2$.

399. $y=x$. 400. $y=-2(\sqrt{x+3}+1)e^{-\sqrt{x+3}}$. 401. $y=$ $=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. 402. $y=x-\sqrt{2e^x-1}+\ln 2$. 403. $y=$ $=\frac{1}{12}(x^3+6x^2)+C_1x\ln|x|+C_2x+C_3$. 404. $x=C_1y^2+C_2y+C_3$

405. $y=C_2+\frac{3}{7}(x+C_1)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{4}C_1(x+C_1)^{\frac{4}{3}}$ 406. $y=C_3+C_2x+$ $+C_1\ln x-\frac{1}{2x}$. 407. $y=C_2-\frac{1}{2}\sqrt{1-C_1^2}\,x^2+\frac{1}{2}C_1x\sqrt{1-x^2}+$ $+\frac{1}{2}C_1\operatorname{arcsen} x$. 408. $y=\frac{1}{2}x\ln|x|+C_1\ln|x-1|+C_2x+C_3$.

409. $C_1y^2-1=(C_1x+C_2)^2$. 410. $y=\frac{C_1}{2}\left(e^{\frac{x+C_2}{C_1}}+e^{-\frac{x+C_2}{C_1}}\right)$.

411. $y=\left(\frac{x}{3}+1\right)^3$. 412. $x+C_2=\pm\frac{1}{C_1}\ln\left|\frac{\sqrt{C_1^2+ae^y}-C_1}{\sqrt{C_1^2+ae^y}+C_1}\right|$.

413. $3x+C_2=8\sqrt{C_1+\sqrt{y}}(\sqrt{y}-2C_1)$. 414. $C_2^2(x-C_1)=$ $=\pm\left(2C_2y^{\frac{2}{3}}+1\right)\sqrt{C_2y^{\frac{2}{3}}-1}$. 415. $(x-C_1)^2=4C_2(y-C_2)$.

416. $y=\sqrt{2x-x^2}$. 417. $y=\frac{4}{(x-2)^2}$. 418. $C_1x+C_2=\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|$.
419. $y=C_2e^{C_1x}$. 420. $y=-\ln|x-1|$. 421. $y\cos^2(x+C_1)=C_2$.
422. $y=-\ln\cos(x+C_1)+C_2$. 423. $y=C_2e^{\frac{1}{3}(x^2+C_1)^{\frac{3}{2}}}$. 424. $y=x$.
425. $y=\ln(1+e^{2x})-2x$. 426. $y=\pm\operatorname{arcsen} e^{x+C_1}+C_2$.
427. $(x+C_1)^2+(y+C_2)^2=9$. 428. $\left.\begin{array}{l}x=1+p(2\ln p-1)\\ y=p^2\ln p\end{array}\right\}$.
429. $\left.\begin{array}{l}x=(p+1)e^p\\ y=p^2e^p\end{array}\right\}$. 430. $y=C_3e^{x\left(\frac{1}{2}\ln^2 x+C_1\ln x+C_2\right)}$.
431. $\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{x^2}$, ($x$ es la distancia del cuerpo hasta el centro de la Tierra): $t\approx 122$ horas. 432. $m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{k}{x^3}$; $x^2=\frac{a^2}{C_1}(t+C_2)^2+C_1$; $a^2=\frac{k}{m}$. 433. $m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$; $x=\frac{m}{k}\ln\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$, $a=\sqrt{\frac{kg}{m}}$. 434. $Cx=y^{2k-1}$ $\left(k>\frac{1}{2}\right)$. 435. $(x+C_1)^2+(y+C_2)^2=R$, donde $R=\text{const}$. 436. Sí. 437. No. 438. No. 439. Sí. 440. Sí. 441. Sí. 442. No. 443. No. 444. No. 445. No. 446. No. 447. No. 448. No. 449. No. 450. Sí. 451. No. 452. 1.
453. $-\frac{2}{x}$ $(x\neq 0)$. 454. 0. 455. e^{-2x} 456. 0. 457. $-8\operatorname{sen}^3 x$.
458. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. 459. $\frac{\pi}{2\sqrt{\pi^2-x^2}}$ $(|x|<\pi)$. 460. 0. 461. 0.
462. $1-\ln x$ $(x>0)$. 463. $\frac{x-1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$ $(x\neq 0)$. 464. $-e^{2x}$.
465. $-2e^{-6x}$. 466. 1. 467. 1. 473. $y''+3y'+2y=0$. 474. $2y''-3y'-5y=0$. 475. $y'''+3y''+2y'=0$. 476. $y^{IV}+2y''+2y=0$. 477. $y'''=0$. 478. $y''-3y'+2y=0$, $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$. 479. $y''-2y'+y=0$, $y=C_1e^x+C_2xe^x$. 480. $y''-6y'+13y=0$. $y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen} 2x)$. 481. $y'''-3y''+3y'-y=0$, $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x$. 482. $y''-y=0$. 483. $y''-y'=0$. 484. $y''+4y'+4y=0$. 485. $y''+9y=0$. 486. $y''=0$. 487. $y'''-6y''+11y'-6y=0$. 488. $y'''-3y''+3y'-y=0$. 489. $y'''-4y''+5y'-2y=0$. 490. $y'''-y''=0$. 491. $y'''+y'=0$. 492. $y'''-2y''+y'-2y=0$. 493. $y'''+2y''+2y'=0$. 494. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. 495. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-\frac{4}{3}x}$. 496. $y=e^x(1+x)$. 497. $y=e^{-x}(C_1x+C_2)$. 498. $y=4e^x+2e^{3x}$. 499. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+C_3e^{-3x}$. 500. $y=C_1e^{(1-\sqrt{3})x}+C_2e^{(1+\sqrt{3})x}$

501. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + e^{-x}(C_5 + C_6x)$. 502. $y = e^x\left(C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right)$. 503. $y = C_1e^{2x} + e^{-x} \times (C_2 \cos \sqrt{3}\, x + C_3 \operatorname{sen} \sqrt{x})$. 504. $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + (C_3 \cos 2x + C_4 \operatorname{sen} 2x)e^{-x}$. 505. $y = e^x \operatorname{sen} x$. 506. $y = e^x \times (\cos \sqrt{2}\, x + \sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}\, x)$. 507. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + e^{-x} \times (C_3 \cos 2x + C_4 \operatorname{sen} 2x)$. 508. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + (C_3 + C_4 \cos x + C_5 \operatorname{sen} x)e^{-x}$. 509. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x}$.
510. $y = C_1 + C_2e^x \cos x + C_3e^x \operatorname{sen} x$. 511. $y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x$. 512. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + \dots + C_{10}x^9$.
513. $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3e^{2x}$. 514. $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{\frac{x}{2}}$.
515. $y_p = A_1x^2 + A_2x + A_2$. 516. $y_p = A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x$.
517. $y_p = A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2$. 518. $y_p = (A_1x + A_2)e^{-x}$. 519. $y_p = (A_1x^2 + A_2x)e^{-x}$. 520. $y_p = (A_1x^3 + A_2x)e^{-x}$. 521. $y_p = A \operatorname{sen} x + B \cos x$. 522. $y_p = x(A \operatorname{sen} x + B \cos x)$. 523. $y_p = x(A_1 \operatorname{sen} 2x + B_1 \cos 2x)$. 524. $y_p = x(A_1 \operatorname{sen} kx + B_1 \cos kx)$.
525. $y_p = (A_1 \operatorname{sen} x + B_1 \cos x)e^{-x}$. 526. $y_p = x(A_1 \operatorname{sen} x + B_1 \cos x)e^{-x}$.
527. $y_p = A_1x^2 + A_2x + A_3$. 528. $y_p = A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x$.
529. $y_p = A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2$. 530. $y_p = A_1x^5 + A_2x^4 + A_3x^3$.
531. $y_p = (A_1 \operatorname{sen} x + B_1 \cos x)x$. 532. a) $y_p = x(A_1e^{-x} + A_2e^x)$.
b) $y_p = A_1e^{-x} + A_2e^x$ c) $y_p = A_1x^2e^{-x} + A_2xe^x$ d) $y_p = A_1x^3e^{-x} + A_2e^x$. e) $y_p = A_1xe^{-x} + A_2x^2e^x$. f) $y_p = A_1e^{-x} + A_2x^3e^x$.
533. a) $y_p = (A_1x^2 + A_2x + A_3)e^{kx}$. b) $y_p = (A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x)e^{kx}$.
c) $y_p = (A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2)e^{kx}$. d) $y_p = (A_1x^2 + A_2x + A_3)e^{kx}$.
e) $y_p = (A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2)e^{kx}$. f) $y_p = (A_1x^5 + A_2x^4 + A_3x^3)e^{kx}$.
534. a) $y_p = A \operatorname{sen} x + B \cos x$. b) $y_p = x(A \operatorname{sen} x + B \cos x)$.
535. a) $y_p = x(A \operatorname{sen} 2x + B \cos 2x)e^{3x}$. b) $y_p = x^2(A \operatorname{sen} 2x + B \cos 2x)e^{3x}$.
536. $y_p = Ax$. 537. $y_p = A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x$. 538. $y_p = Ae^x$. 539. $y_p = Axe^{-7x}$. 540. $y_p = (A_1x^3 + A_2x^2)e^{4x}$. 541. $y_p = Ax^2e^{5x}$. 542. $y_p = (A_1x^2 + A_2x)e^{\frac{3}{4}x}$. 543. $y_p = A_1e^x + A_2e^{-2x}$. 544. $y_p = (A_1x^2 + A_2x)e^{4x}$.
545. $y = x(A \cos 5x + B \operatorname{sen} 5x)$. 546. $y_p = x(A \cos x + B \operatorname{sen} x)$.
547. $y_p = x(A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x)$. 548. $y_p = (A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x)^{2x}$.
549. $y_p = x(A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x)e^{2x}$. 550. $y_p = x(A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x)e^{-3x}$. 551. $y_p = x(A \operatorname{sen} kx + B \cos kx)$. 552. $y_p = A$ ($A = \text{const}$). 553. $y_p = A_1 \cos x + B_1 \operatorname{sen} x + A_2 \cos 3x + B_2 \operatorname{sen} 3x$.
554. $y_p = A_1x + A_2 \cos 8x + B_2 \operatorname{sen} 8x$. 555. $y_p = A_1x + A_2$.
556. $y_p = A$ ($A = \text{const}$). 557. $y_p = Ax$. 558. $y_p = Ax^2$. 559. $y_p = A$

$(A = \text{const})$. 560. $y_p = Ax$. 561. $y_p = Ax^2$. 562. $y_p = Ax^3$. 563. $y_p = Ax^2$. 564. $y_p = Ae^{4x}$. 565. $y_p = Ax^2e^{-x}$. 566. $y_p = (A_1x^3 + A_2x^2)e^{-x}$. 567. $y_p = A \operatorname{sen} 2x + B \cos 2x$. 568. $y_p = A \operatorname{sen} x + B \cos x$. 569. $y_p = (A_1x + A_2) \operatorname{sen} 2x + (B_1x + B_2) \cos 2x$. 570. $y_p = x^2 (A \operatorname{sen} nx + B \cos nx)$. 571. $y_p = A \operatorname{sen} nx + B \cos nx$. 572. $y_p = A \operatorname{sen} x + B \cos x$. 573. $y_p = Ax^4e^x$. 574. $y_p = (Ax^5 + Bx^4)e^x$. 575. $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} - 2$. 576. $y = C_1 + C_2e^{-2x} - x$. 577. $y = C_1 \operatorname{sen} 3x + C_2 \cos 3x + 1$. 578. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$. 579. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{\frac{7}{5}x} - \frac{3}{14}x^2$. 580. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{6x} + \frac{1}{6}x^3$. 581. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{-\frac{x}{3}} + \frac{x^3}{3}$. 582. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + (C_3 + C_4x)e^x + 1$. 583. $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$. 584. $y = C_1 + C_2e^{-8x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{8}$. 585. $y = (C_1 + C_2x)e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2}$. 586. $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + 4x^2e^{-2x}$. 587. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x} - \frac{9}{2}xe^{-3x}$. 588. $y = C_1 + C_2e^{\frac{x}{7}} - 7x^2 - 98x$. 589. $y = C_1 + C_2e^{-3x} - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right)e^{-3x}$. 590. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x} + (20x - 5x^2)e^{-2x}$. 591. $y = e^{-x}(C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x) + \frac{x}{2}$. 592. $y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}\right)e^x$. 593. $y = C_1e^{-(\sqrt{6}+2)x} + C_2e^{(\sqrt{6}-2)x} - \frac{12 \operatorname{sen} 2x + 16 \cos 2x}{25}$. 594. $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + x^2 \operatorname{sen} x + x \cos x$. 595. $y = (C_1 + C_2x)e^{mx} + \frac{(m^2 - n^2) \operatorname{sen} nx + 2mn \cos nx}{(m^2 + n^2)^2}$. 596. $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x) - \frac{1}{4}xe^{-x} \cos 2x$ 597. $y = C_1 \cos ax + C_2 \operatorname{sen} ax + \frac{2 \cos mx + 3 \operatorname{sen} mx}{a^2 - m^2}$ $(m \neq a)$ 598. $y = C_1 + C_2e^x - \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$. 599. $y = C_1 + C_2e^{-2x} + \frac{1}{5}e^x(6 \operatorname{sen} x - 2 \cos x)$. 600. $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) + 5xe^{-2x} \operatorname{sen} x$. 601. $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x) - \frac{1}{4}xe^{-x} \cos 2x + \frac{x}{2}e^{-x}$. 602. $y = C_1 + C_2e^{-2x} -$

$-\left(\frac{x}{20}-\frac{7}{50}\right)\operatorname{sen} x-\left(\frac{x}{10}+\frac{1}{50}\right)\cos x$. **603.** $y=C_1e^{2x}+\left(C_2-x-\frac{x^2}{2}\right)e^x$. **604.** $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\frac{e^{4x}}{18}\left(x^2-x+\frac{7}{18}\right)$. **605.** $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{e^{3x}}{2}(x^2-2x+2)$. **606.** $y=C_1e^x+C_2\cos x+C_3\operatorname{sen} x-x^2-3x-1$. **607.** $y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3\cos x+C_4\operatorname{sen} x+\frac{x^2}{4}e^x$. **608.** $y=(C_1+C_2x)e^x+x^3+6x^2+18x+24$. **609.** $y=e^{\frac{3}{5}x}\left(C_1\cos\frac{4}{5}x+C_2\operatorname{sen}\frac{4}{5}x\right)+\frac{e^{2x}}{2}+1{,}3$. **610.** $y=C_1+C_2x+C_3\cos x+C_4\operatorname{sen} x+\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{6}-x^2$. **611.** $y=\frac{x^4}{24}+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4+\left(\frac{x^2}{2}-4x+C_5\right)e^x$. **612.** $y=\left(C_1+\frac{x}{4}-\frac{x^3}{6}\right)\cos x+\left(C_2+\frac{x^2}{4}\right)\operatorname{sen} x$. **613.** $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+e^{-x}(-x^2\cos x+4x\operatorname{sen} x+6\cos x)$. **614.** $y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}+\frac{1}{5}\cos x-\frac{x^3}{12}-\frac{x}{8}+\frac{e^{2x}}{32}(2x^2-3x)$. **615.** $y=C_1e^x+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{2}(\cos x-\operatorname{sen} x)$. **616.** $y=\frac{x}{2}e^{-x}\operatorname{sen} x+xe^{-x}+e^{-x}(C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x)$. **617.** $y=\frac{1}{4}\cos x+(C_1+C_2x)e^x+(C_3+C_4x)e^{-x}$. **618.** $y=\frac{1}{2}x\operatorname{sen} x+\frac{1}{8}\cos 3x+C_1\cos x+C_2\operatorname{sen} x$. **619.** $y=C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}x\cos 2x-\frac{1}{16}x^2\operatorname{sen} 2x$. **620.** $y=\left(\frac{x}{8}-\frac{1}{4}\right)e^x+(C_1+C_2x)e^{-x}+\left(C_3-\frac{x}{8}\right)\cos x+C_4\operatorname{sen} x$. **621.** $y=C_1+C_2e^{-x}+\left(\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right)+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{20}\operatorname{sen} 2x-\frac{1}{10}\cos 2x$. **622.** $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4\cos 2x+C_5\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{5}e^x+\frac{1}{24}x^3+\frac{3}{32}x\operatorname{sen} 2x$. **623.** $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x-\frac{1}{8}e^x\operatorname{sen} 2x$. **624.** $y=C_1e^{-2x}+(C_2\cos x+C_3\operatorname{sen} x)e^x+\frac{1}{8}(2x^2+2x+1)+\frac{1}{40}(\operatorname{sen} 2x+3\cos 2x)+\frac{1}{20}xe^x(3\operatorname{sen} x-\cos x)$. **625.** $y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{3}x^3-x^2+2x+xe^{-x}+\frac{1}{2}x$. **626.** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{1}{4}xe^{-x}-\frac{1}{2}xe^{3x}$.

627. $y=C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen}2x+\frac{1}{5}e^x+x\left(\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x-\cos 2x\right)$.

628. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+3(x^2-2x)e^{-x}+3(x^2+2x)e^{-2x}$.

629. $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen}x+1-\frac{1}{3}\cos 4x-\frac{1}{4}x\operatorname{sen}x$.

630. $y=\left(C_1\cos x+C_2\operatorname{sen}x-\frac{x}{2}\cos x+x\operatorname{sen}x\right)e^{2x}$. 631. $y=$ $=(C_1\cos x+C_2\operatorname{sen}x+1)e^{2x}+\frac{3}{10}+\frac{1}{130}\cos 2x-\frac{4}{65}\operatorname{sen}2x$. 632. $y=$ $=\left(C_1\cos x+C_2\operatorname{sen}x+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x\operatorname{sen}x\right)e^x$. 633. $y=C_1+C_2e^{3x}-$ $-\frac{x}{3}-\frac{1}{2}e^x+\frac{\cos x-2\operatorname{sen}x}{5}$. 634. $y=\left(C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen}2x+\right.$ $\left.+\frac{x}{4}\operatorname{sen}2x\right)e^x+2x+1$. 635. $y=(C_1+C_2x)e^x+x+1+$ $+\frac{1}{25}(4\cos x+3\operatorname{sen}x)+\frac{1}{8}\cos 2x$. 636. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+1+\operatorname{sen}x+$ $+\frac{\cos 2x+7\operatorname{sen}2x}{25}$. 637. $y=\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}+$ $+x^2-x-2-\cos x$. 638. $y=(C_1+C_2x)e^{-3x}+\frac{1}{9}+\frac{3}{2}x^3e^{-3x}+$ $+\frac{1}{50}(36\operatorname{sen}x-27\cos x)$. 639. $y=C_1+C_2e^{-2x}-\frac{x}{2}-\frac{1}{5}\cos x+$ $+\frac{2}{5}\operatorname{sen}x-\frac{3}{8}(\operatorname{sen}2x+\cos 2x)$. 640. $y=e^{2x}-e^{3x}+xe^{-x}$.

641. $y=-\frac{1}{3}(\cos 3x+\operatorname{sen}3x-e^{3x})$. 642. $y=e^{2x}(\cos x-2\operatorname{sen}x)+$ $+(x+1)^2e^x$. 643. $y\left(x+\frac{3}{5}\right)e^{-3x}+\frac{1}{5}(4\operatorname{sen}x-3\cos x)$.

644. $y=\cos x+x\operatorname{sen}x$. 645. $y=\cos 2x+\frac{1}{3}(\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}x)$.

646. $y=(1-3x)e^{3x}+\frac{x^2}{9}+\frac{x}{27}+\frac{1}{3}$. 647. $y=(4x+2)e^{2x}+\frac{1}{2}y^2e^{2x}$.

648. $y=3\pi\cos 2x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x+x(\operatorname{sen}2x-\cos 2x)$. 649. $y=-4+$ $+2e^x+e^{-x}(\operatorname{sen}x-2\cos x)$. 650. $y=-e^x[\pi\cos x+(\pi+1-2x)\operatorname{sen}x)]$.

651. $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})+x^2$. 652. $y=\cos x+2\operatorname{sen}x+e^{-x}-3e^x+2xe^x$.

653. $y=-\frac{4}{\sqrt{3}}e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x+2x$. 654. $y=2xe^x$ 655. $y=\frac{1}{4}\cos x$.

656. $y=\operatorname{sen}2x$. 657. $y=-1$. 658. $y=\cos x$. 659. $y=e^{-x}$.

660. $y=3+e^x$. 661. $y=-\frac{1}{5}$. 662. $y=e^x(\operatorname{sen}x+\cos x)$.

663. $y=e^{-2x}\cos 2x$. 664. $y=(x^2+x)e^{-x}$. 665. $y=C_1x+\frac{C_2}{x}$.

666. $y=\frac{1}{x}(C_1+C_2\ln x)$. 667. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\ln x\right)+\right.$
$\left.+C_2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\ln x\right)\right]$. 668. $y=C_1+C_2\ln x$. 669. $y=\frac{C_1}{(x-2)^3}+$
$+C_2(x-2)$. 670. $y=C_1(2x+1)+C_2(2x+1)\ln(2x+1)$.
671. $y=C_1+C_2x^2+C_3x^4$. 672. $y=C_1+C_2\ln x+C_3x^3$.
673. $y=C_1+\frac{C_2}{(x+1)^2}+C_3(x+1)^5$. 674. $y=C_1+(2x+1)\times$
$\times\left[C_2\cos\frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{2}}+C_3\operatorname{sen}\frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{2}}\right]$. 675. $y=C_1\cos\ln x+$
$+C_2\operatorname{sen}\ln x+\frac{1}{2}x(7-\ln x)$. 676. $y=x(C_1+C_2\ln x+\ln^2 x)$.
677. $y=\frac{1}{x}(C_1+C_2x^4+\ln x+2\ln^2 x)$. 678. $y=C_1x+C_2x^2+1+$
$+(x^2+2x)\ln x$. 679. $y=\frac{x^m}{m^2-1}+C_1x+\frac{C_2}{x}$. 680. $y=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}+$
$+\ln^2 x-3\ln x+2x+7$. 681. $y=C_1x+C_2x^2+C_3x^3$.
682. $y=C_1(x^3-x)+C_2\left[6x^2-4-3(x^3-x)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right]$.
683. $y=C_1e^{-2x}+C_2(4x^2+1)$. 684. $y=\frac{C_1}{x^2}+C_2(2x-3)$.
685. $y=C_1x^3+C_2(x+1)-x$. 686. $y=C_1\ln x+C_2x$. 687. $y=$
$=C_1\operatorname{sen}x+C_2\sin^2 x$. 688. $y=C_1\cos(\operatorname{sen}x)+C_2\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)$. 689. $y=1+$
$+C_1x+C_2\sqrt{1+x^2}$. 690. $y=C_1x^2+\frac{C_2}{x}+x^4$. 691. $y=C_1(2x-1)+\frac{C^2}{x}+x^2$.
692. $y=x+C_1\cos e^x+C_2\operatorname{sen}e^x$. 693. $y=C_1+C_2\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}x\cdot\ln|\operatorname{sen}x|$.
694. $y=\frac{C_1+C_2\ln(x+1)+\ln^3(x+1)}{x+1}$. 695. $y=x^3+C_1x^2+C_2(2x-1)$.
696. $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{k}{m}x$ (x es la longitud del trozo de la cadena que cuelga),
$t=\sqrt{\frac{6}{g}}\ln(6+\sqrt{35})$ s, $k=g$, $m=6$. 697. $\frac{d^2s}{dt^2}=1{,}2t$, $s=0{,}2t^3-t$.
698. $m\frac{d^2s}{dt^2}=-km$, $s=\frac{v_0^2}{2k}$. 699. $\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x$, $x=ae^{kt}$.
700. $y=C_1\cos 2x+C_2\operatorname{sen}2x+\frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|+\frac{x}{2}\operatorname{sen}2x$.
701. $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|-2$. 702. $y=$
$=C_1e^x+C_2e^{-x}-1-xe^{-x}+(e^x-e^{-x})\ln(1-e^{-x})$. 703. $y=C_1e^x+$
$+C_2+(e^x+1)\ln(1+e^{-x})$. 704. $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen}x+\frac{4}{3}\cos x\cdot\sqrt{\operatorname{ctg}x}$.
705. $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen}x-\sqrt{\cos 2x}$. 706. $y=\frac{1}{x}+C_1e^x+$
$+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}$. 707. $y=C_1\cos x+C_2\operatorname{sen}x+\frac{9}{4}\cos x\sqrt[3]{\operatorname{ctg}x}+$

$+\frac{9}{10}\operatorname{sen} x \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}$. 708. $y=e^x\left(C_1+C_2x-\ln\sqrt{x^2+1}+x\operatorname{arctg} x\right)$.
709. $y=(C_1-x)\,e^{-x}\cos x+(C_2+\ln\operatorname{sen} x)\,e^{-x}\operatorname{sen} x$. 710. $y=C_1e^x+$
$+C_2-\cos e^x$. 711. $y=C_1+C_2e^{-x}+e^{-x}\int\frac{e^x}{x}\,dx-\ln|x|$.
712. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-2x}\int\frac{e^{2x}\,dx}{x+1}$. 713. $y=C_1\cos x+$
$+C_2\operatorname{sen} x-\cos x\int\frac{\cos x}{x}\,dx-\operatorname{sen} x\int\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$. 714. $y=C_1e^{x^2}+$
$+C_2+(x^2-1)\,e^{x^2}$. 715. $y=C_1+C_2\operatorname{tg} x+\frac{1}{2}(1+x\operatorname{tg} x)$.
716. $y=C_1(\ln x-1)\,x+C_2+x(\ln^2 x-2\ln x-2)$. 717. $y=$
$=C_1\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x}+C_2-x^2$. 718. $y=C_1x+C_2e^x+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)e_x$.
719. $y=C_1\cos e^{-x}+C_2\operatorname{sen} e^{-x}+e^{-x}$. 720. $y=C_1e^{\frac{1}{x}}+C_2\frac{1}{x}+$
$+1-\frac{\ln|x|}{x}$. 721. $y=C_1e^x+C_2\operatorname{sen} x+e^x(\cos x+\operatorname{sen} x)$.
722. $y=C_1e^{x^2}+C_2e^{-x^2}+(2x^2-1)\,e^{x^2}$. 723. $y=C_1e^x+C_2\ln x+$
$+e^x(x-x\ln x+\ln x)$. 724. $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^2+x}$. 725. $y=\frac{x+1}{\cos x}$.
726. $y=\operatorname{sen} x$. 727. $y=1$. 728. $y=\frac{1}{x}$. 729. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x$.
730. $y=\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)e^x$. 731. $y=\frac{1-\ln x}{\sqrt{x}}$. 732. $y=(x-1)\,e^x$.
733. $y=\frac{1}{x}$. 734. $y=1$. 750. a) $\lambda=k^2$, $k=0, 1, 2, \ldots$ b) $\lambda=4k^2$,
$k=0, 1, 2, \ldots$ 751. Para cualesquiera λ. 752. a) Tiene solución
$y=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 2\pi}$; b) No tiene solución. 753. 1) $\lambda-\omega^2>0$, $y=C_1\cos 2n\pi x+$
$+C_2\operatorname{sen} 2n\pi x$; 2) $\lambda-\omega^2=0$, $y=C$; 3) $\lambda-\omega^2<0$, $y\equiv 0$.
754. $y=+\sqrt{5-(x-2)^2}$. 755. $y(x)=\frac{e^{-\alpha sx}-e^{-\alpha s(2x_0-x)}}{1-e^{-2\alpha sx_0}}v_1+$
$+\frac{e^{-\alpha s(x_0-x)}-e^{-\alpha s(x_0+x)}}{1-e^{-2\alpha sx_0}}v_2$. 756. $y(x)=\frac{e^{-\alpha\sqrt{s}\,x}+e^{-\alpha(2x_0-x)\sqrt{s}}}{1+e^{-2\alpha\sqrt{s}\,x_0}}v$.
757. a) $y=\frac{1}{s}\frac{\operatorname{ch}\alpha\sqrt{s}\,(x-x_0)}{\operatorname{ch}\alpha\sqrt{s}\,x_0}$; b) $y=-\frac{1}{\alpha s\sqrt{s}}\frac{\operatorname{sh}\alpha\sqrt{s}\,(x-x_0)}{\operatorname{ch}\alpha\sqrt{s}\,x_0}$.
758. $y=\frac{gl^3}{s^2}\frac{e^{-\alpha sx}-e^{-\alpha s(x_0+x)}+e^{-\alpha s(x_0-x)}-e^{-\alpha s(2x_0-x)}+e^{-2\alpha sx_0}-1}{1-e^{-2\alpha sx_0}}$.
759. a) $y=\frac{1}{\lambda}\frac{\operatorname{sh}\lambda x}{\operatorname{sh}\lambda}$; b) $y=\frac{1}{\lambda}\frac{\operatorname{ch}\lambda x}{\operatorname{ch}\lambda}$; c) $y=\frac{1}{\lambda^2}\frac{\operatorname{sh}\lambda x}{\operatorname{ch}\lambda}$;
d) $y=\frac{1}{\lambda^2}\frac{\operatorname{ch}\lambda x}{\operatorname{sh}\lambda}$. 760. $y=C\operatorname{sen} kx$, $k=0, 1, 2, \ldots$ 761. $y=$

$= C\left[e^{\lambda x} - e^{-\lambda(2\pi - x)} - (1 - e^{2\lambda\pi})\cos\lambda x - (1 + e^{2\lambda\pi})\operatorname{sen}\lambda x\right]$, $\operatorname{th}\lambda\pi = \operatorname{tg}\lambda\pi$.

762. $y = C\left[\frac{(\cos\lambda\pi - \operatorname{sen}\lambda\pi - e^{-\lambda\pi})e^{\lambda x} + (e^{\lambda\pi} - \cos\lambda\pi - \operatorname{sen}\lambda\pi)e^{\lambda x}}{2(\operatorname{ch}\lambda\pi - \cos\lambda\pi)} + \right.$

$\left. + \frac{2(\operatorname{sen}\lambda\pi - \operatorname{sh}\lambda\pi)\cos\lambda x + 2\operatorname{sen}\lambda x\cdot(\operatorname{ch}\lambda\pi - \cos\lambda\pi)}{2(\operatorname{ch}\lambda\pi - \cos\lambda\pi)}\right]$, $\operatorname{ch}\lambda\pi\cos\lambda\pi = 1$.

763. $y = \frac{x-1}{\alpha}e^{-\alpha x}$, 764. $y = \frac{2}{75}\operatorname{sen}x + \frac{4}{75}\operatorname{sen}2x + \frac{1}{25}\cos 2x$.

765. $y = 0$. 766. $y = C(x\ln x - x + 1)$. 767. $y = 0$. 768. $y = 1 + x^2 +$

$+ \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots (= e^{x^2})$. 769. $y = C_1\left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \ldots\right) +$

$+ C_2\sqrt{x}\left(1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{6!} - \ldots\right)$; $(y = C_1\cos\sqrt{x} + C_2\operatorname{sen}\sqrt{x})$.

770. $y = C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k$. 771. $y = C_1\left(1 + \frac{x}{3} +\right.$

$\left. + \frac{1\cdot 4x^2}{3\cdot 6} + \frac{1\cdot 4\cdot 7x^3}{3\cdot 6\cdot 9} + \ldots\right) + C_2x^{\frac{7}{3}}\left(1 + \frac{8x}{10} + \frac{8\cdot 11x^2}{10\cdot 13} + \frac{8\cdot 11\cdot 14x^3}{10\cdot 13\cdot 16} + \ldots\right)$.

772. $y = C_1\left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2\cdot 4\ldots 2n} + \ldots\right] + C_2\left[x - \frac{x^3}{1\cdot 3} +\right.$

$\left. + \frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)} + \ldots\right]$; 773. $y = \frac{x^2}{2} +$

$+ \frac{x^4}{4!} + \frac{3x^6}{6!} + \frac{3\cdot 5x^8}{8!} + \ldots + \frac{(2n+1)!!\,x^{2n+4}}{(2n+4)!} + \ldots (2n+1)!! =$

$= 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)$. 774. $y = -2 + 2x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{7x^5}{60} - \ldots$

775. $y = 1 + \frac{2x^4}{4!} - \frac{2x^5}{5!} + \frac{2x^6}{6!} - \frac{2x^7}{7!} + \frac{62x^8}{8!} - \ldots$ 776. $y =$

$= C_1\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} + \frac{13x^6}{720} + \ldots\right) + C_2\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} +\right.$

$\left. + \frac{x^5}{30} + \frac{x^6}{72} + \frac{29x^7}{5040} + \ldots\right)$. 777. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{3\cdot 11\cdot 63} + \frac{5x^{15}}{3^2\cdot 11\cdot 63^2} +$

$+ \frac{23x^{19}}{19\cdot 3^2\cdot 11\cdot 63^2} + \frac{7555x^{23}}{19\cdot 3^2\cdot 11^2\cdot 63^3} + \ldots$ 778. $y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{11x^4}{24} +$

$+ \frac{53x^5}{120} + \frac{269x^6}{720} + \ldots$ 779. $y = C_1J_{\frac{1}{3}}(x) + C_2J_{-\frac{1}{3}}(2x)$.

780. $y = C_1J_{\frac{1}{2}}(x) + C_2J_{-\frac{1}{2}}(x)$. 781. $y = C_1J_0\left(\frac{x}{3}\right) + C_2Y_0\left(\frac{x}{3}\right)$.

782. $y = C_1J_0(2x) + C_2Y_0(2x)$. 783. $y = x^{3/2}\left[C_1J_{\frac{5}{4}}(x^2) + C_2J_{-\frac{5}{4}}(x^2)\right]$.

784. $y = \sqrt[4]{x}\left[C_1J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x}) + C_2J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{x})\right]$. 785. $y = \frac{1}{x^2}[C_1J_2(x) + C_2Y_2(x)]$.

786. $y = \frac{1}{x}[C_1J_1(2x) + C_2J_1(2x)]$. 787. $y(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3\cdot 5} - \ldots$

798. $y(x)=1+x-x^2+\ldots$ **799.** $y(x)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+\ldots$

800. $y(x)=x-\frac{2x^4}{4!}+\frac{10}{7!}x^7-\ldots$ **801.** $y(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^5}{5!}+\ldots$

802. $y(x)=1+\frac{(x-\pi)^2}{3}+\frac{(x-\pi)^3}{3\pi}+\ldots$ **803.** $y(x)=e^{-1}+\frac{\operatorname{sen} 1}{2!}(x-e)^2+$
$+\frac{\cos 1-\operatorname{sen} 1}{3!\,e}(x-e)^3+\ldots$ **804.** $y(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{x^4}{4!}+\frac{2}{6!}x^6-\ldots$

805. $y=\frac{1}{3}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx+\operatorname{sen} nx}{n^3(n^2-3)}$. **806.** No hay soluciones periódicas.

807. $y=C-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx+n\operatorname{sen} nx}{n^3(n^2+1)}$. **808.** $y=\frac{\pi^2}{6}+$
$+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n^2-4)\cos nx+4n\operatorname{sen} nx}{n^2[(n^2-4)^2+16n^2]}$. **809.** $y=-\frac{1}{2\pi}+$
$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n\pi x}{(\pi^2n^2+1)(4n^2-1)}$. **810.** $y=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\times$
$\times\frac{4n\cos nx+(4-n^2)\operatorname{sen} nx}{(2n-1)^2[(4-n^2)^2+16n^2]}$. **811.** No hay soluciones periódicas.

812. $\left.\begin{array}{l} x=t+C_1\cos 2t+C_2\operatorname{sen} 2t \\ y=1+C_1\operatorname{sen} 2t+C_2\cos 2t \end{array}\right\}$.

813. $\left.\begin{array}{l} x=(C_1-C_2)e^{2t}\cos t-(C_1+C_2)e^{2t}\operatorname{sen} t \\ y=(C_1\operatorname{sen} t+C_2\cos t)e^{2t} \end{array}\right\}$.

814. $\left.\begin{array}{l} x=e^{-2t}(1-2t) \\ y=e^{-2t}(1+2t) \end{array}\right\}$. **815.** $\left.\begin{array}{l} x=t^2+t+C_1e^{2t}+C_2e^{3t} \\ y=t+1+2C_1e^{2t} \end{array}\right\}$.

816. $\left.\begin{array}{l} x=e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\operatorname{sen} t) \\ y=e^{-6t}[(C_1+C_2)\cos t- \\ \quad -(C_1-C_2)\operatorname{sen} t] \end{array}\right\}$. **817.** $\left.\begin{array}{l} x=(C_1-3C_1t-3C_2)e^{5t} \\ y=(C_1t+C_2)e^{5t} \end{array}\right\}$.

818. $\left.\begin{array}{l} x=C_1e^{-t}+C_2e^{2t} \\ y=C_3e^{-t}+C_2e^{2t} \\ z=-(C_1+C_3)e^{-t}+C_2e^{2t} \end{array}\right\}$. **819.** $\left.\begin{array}{l} x=C_1e^{3t}+C_2e^{-2t} \\ y=\frac{3}{2}C_1e^{3t}-C_2e^{-2t}+C_3e^{-t} \\ z=\frac{3}{2}C_1e^{3t}-C_2e^{-3t}-C_3e^{-t} \end{array}\right\}$.

820. $\left.\begin{aligned} x &= C_1e^{-2t} + C_2 \operatorname{sen} 4t + C_3 \cos 4t \\ y &= -\frac{1}{4} C_1e^{-2t} + \frac{1}{2} C_2 \cos 4t - \frac{1}{2} C_3 \operatorname{sen} 4t \\ z &= -\frac{1}{4} C_1e^{-2t} + C_2 \operatorname{sen} 4t + C_3 \cos 4t \end{aligned}\right\}.$

821. $\left.\begin{aligned} x &= C_1e^{t} + C_2 \operatorname{sen} t + C_3 \cos t \\ y &= t - C_1e^{t} + C_2 \cos t - C_3 \operatorname{sen} t \\ z &= 1 + C_2 \operatorname{sen} t + C_3 \cos t \end{aligned}\right\}.$

822. $\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{3} C_1e^{-t} + \frac{1}{6} C_2e^{2t} + \frac{1}{2} C_3e^{-2t} + \frac{1}{6} e^{t} + \frac{3}{20} e^{3t} - 2 \\ y &= \frac{1}{3} C_1e^{-t} + \frac{1}{6} C_2e^{2t} - \frac{1}{2} C_3e^{-2t} - \frac{1}{6} e^{t} + \frac{7}{20} e^{3t} - 2 \\ z &= -\frac{1}{3} C_1e^{-t} + \frac{1}{3} C_2e^{2t} - \frac{1}{2} e^{t} + \frac{1}{4} e^{3t} \end{aligned}\right\}.$

823. $\left.\begin{aligned} x &= C_1e^{\operatorname{sen} t} \\ y &= C_2e^{\operatorname{sh} t} \end{aligned}\right\}.$ 824. $\left.\begin{aligned} x &= \frac{4}{25} e^{t} - \frac{1}{36} e^{2t} \\ y &= \frac{1}{25} e^{t} + \frac{7}{36} e^{2t} \end{aligned}\right\},$ 825. $\left.\begin{aligned} x &= 2\,(2e^{t} + e^{-t}) \\ y &= -e^{t} - e^{-t} \end{aligned}\right\}.$

826. $\left.\begin{aligned} x &= \cos t + \operatorname{sen} t \\ y &= \cos t - \operatorname{sen} t \end{aligned}\right\}.$

827. $\left.\begin{aligned} x &= (1 - 2t)\, e^{-2t} \\ y &= te^{-2t} \end{aligned}\right\}.$

828. $\left.\begin{aligned} x &= -5e^{2t} \operatorname{sen} t \\ y &= e^{2t} (\cos t - 2 \operatorname{sen} t) \end{aligned}\right\}.$

829. $\left.\begin{aligned} x &= -\frac{4}{3} t - \frac{7}{9} \\ y &= \frac{1}{3} t - \frac{5}{9} \end{aligned}\right\}.$

830. $\left.\begin{aligned} x &= (\operatorname{sen} t - 2 \cos t)\, e^{-t} \\ y &= e^{-t} \cos t \end{aligned}\right\}.$

831. $\left.\begin{aligned} x &= e^{5t} + e^{3t} \\ y &= 6e^{5t} - 7e^{3t} \end{aligned}\right\}.$

832. $\left.\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= -\operatorname{sen} t \end{aligned}\right\}.$

833. $\left.\begin{aligned} x &= -(2t + \operatorname{sen} t + \cos t + e^{-t}) \\ y &= \cos t - 2e^{-t} + 2 \end{aligned}\right\}.$

834. $\left.\begin{aligned} x &= e^{2t} + e^{3t} + t^2 + t \\ y &= 2e^{2t} + t + 1 \end{aligned}\right\}.$

835. $\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{2t + C_2}{C_1}} \\ y &= \sqrt{C_1 (2t + C_2)} \end{aligned}\right\}.$

836. $\left.\begin{aligned} lt + mx + ny &= C_1 \\ t^2 + x^2 + y^2 &= C_2 \end{aligned}\right\}.$

837. $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= C_1^2 \\ p^2 + q^2 &= C_2^2 \\ xp + yq &= C_3 \end{aligned}\right\}.$

838. $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+t^2=C_1 \\ x^2-2xy-y^2=C_2 \end{array}\right\}.$ 839. $\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{3}t+C_2\frac{1}{t^2} \\ y=C_1e^t-\frac{t}{3}-\frac{C_2}{t^2} \end{array}\right\}.$

840. $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=C_1x-t^2 \\ y=C_2x \end{array}\right\}.$ 841. $\left.\begin{array}{r} x=C_1t \\ y=C_2e^t \end{array}\right\}.$ 842. $\left.\begin{array}{r} t^2-x^2=C_1 \\ x^2-y^2=C_2 \end{array}\right\}.$

843. Inestable. 844. Inestable. 845. Estable. 846. Estable. 847. Estable. 848. Estable 849. Foco inestable. 850. Punto de ensilladura. 851. Centro. 852. Foco estable. 853. Nodo inestable. 854. Nodo estable. 855. Nodo inestable. 856. Nodo estable. 857. Nodo inestable. 858. $\alpha\leqslant-\frac{3}{2}$. 859. Inestable. 860. Estable. 861. Estable. 862. Estable. 863. Estable. 864. Inestable. 865. Estable. 866. Inestable. 867. Estable. 868. Estable. 869. Inestable. 870. $\Delta<0{,}017$ 871. $\Delta<0{,}16$. 872. $\Delta<0{,}0012$. 973. Inestable. 874. Estable. 875. Estable. 876. Inestable. 877. Estable. 878. Inestable. 879. Estable. 880. Estable. 881. Estable. 882. Inestable. 883. Estable. 884. $\alpha>\frac{3}{2}$. 885. Siempre inestable. 886. $\alpha>\frac{5}{2}$. 887. $\alpha>0$, $\alpha\beta>1+\alpha^2$. 888. $\alpha>\frac{2}{3}$, $\beta>0$, $9\beta-6\alpha+4<0$. 889. Estable. 890. Estable. 891. Estable. 892. Estable. 893. Estable. 894. Estable. 895. Estable. 896. Inestable. 897. Inestable. 898. Inestable. 899. Inestable. 900. Estable. 901. Inestable. 902. Estable. 903. Estable. 904. Inestable. 905. Inestable. 906. Inestable. 907. Inestable. 908. $x=0$ inestable. $x=t^4+1$ estable. 909. $x=t$ estable. $x=e^t$ inestable. 910. $x=t$ para $t<0$ y $x=-t$ para $t>0$, estable. 911. $x=0$ es estable para $t<0$. 912. $x=t$. es estable. $x=e^{t^2+1}$, inestable. 913. Inestable. 914. Inestable. 915. $\frac{2}{p^3}-\frac{2}{p^2}+\frac{2}{p}$. 916. $\frac{6}{p^4}+\frac{8}{p^3}+\frac{4}{p^2}$.

917. $\frac{6e^{-2p}}{p^4}$. 918. $\frac{1}{(p+\alpha)^2}$. 919. $\frac{2p}{(p-1)^3}$.

920. $\frac{p^2-2a^2}{p(p^2-4a)^2}$. 921. $\frac{2}{(p+1)^3}e^{-p}$. 922. $\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$.

923. $\frac{1}{2}\left[\frac{p-3}{(p-3)^2+49}+\frac{p-3}{(p-3)^2+1}\right]$. 924. $\frac{1}{(p-\lambda)^2+1}e^{-\alpha p}$.

925. $\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{p-1}{p^2-4p+5}$. 926. $\frac{(p-\alpha)\cos\beta-\operatorname{sen}\beta}{(p-\alpha)^2+1}$. 927. $\operatorname{arctg}\frac{1}{p}$.

928. $\operatorname{arctg}\frac{1}{p+\lambda}$. 929. $\frac{20p}{p^4+58p^2+141}$. 930. $\frac{8}{p(p^2+16)}$.

931. $\frac{p^2+1}{(p^2-1)^2}$. 932. $\frac{2p}{(p^2+1)^2}$. 933. $\frac{p^3+20p}{p^4+40p^2+144}$.

934. $\frac{p^2+32}{p^3+64p}$. 935. $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}(4\operatorname{sen} t-3\cos t)\,e^{-2t}$ 936. $t\cdot \operatorname{ch} at$.

937. t^k. 938. $e^{3t}-e^t$. 939. $\frac{3}{2}e^{-2t}\cos\sqrt{\frac{11}{2}}\,t+\frac{13}{\sqrt{22}}e^{-2t}\operatorname{sen}\sqrt{\frac{11}{2}}\,t$.

940. $\frac{4\sqrt{3}}{9}e^{-\frac{t}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{2}{3}te^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$. 941. $\frac{1}{9}(e^{-2t}-e^t+3te^t)$. 942. $(\sqrt{2}-1)e^t+(\sqrt{2}+1)e^{-t}-2\sqrt{2}\,e^{-\sqrt{2}t}$.

943. $\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t$. 944. $\frac{1}{2}(\operatorname{sh} t-\operatorname{sen} t)$. 945. $\cos 2(t-2)\,\eta(t-2)$.

946. $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3\left(t-\frac{1}{2}\right)\eta\left(t-\frac{1}{2}\right)$. 947. $3t^2e^{-t}+te^{-2t}$.

948. $2e^{3t}\cos\sqrt{3}\,t+\frac{11}{\sqrt{3}}e^{3t}\operatorname{sen}\sqrt{3}\,t$. 949. $\frac{1}{4}\left(\operatorname{sh} t-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{sen}\sqrt{3}\,t\right)$.

950. $\left(t-\frac{3}{2}\right)\eta\left(t-\frac{3}{2}\right)$. 851. $x=e^{-2t}-e^{-3t}$.

952. $x=-(t^3+2t^2+2t+1)$. 953. $x=\operatorname{sen} t$. 954. $x=e^{-t}+\operatorname{sen} t-\cos t$.

955. $x=\frac{t^2-2}{2}e^{-3t}$. 956. $x=\frac{1}{3}+3e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-3t}$. 957. $x=\frac{1}{2}$.

958. $x=2$. 959. $x=\frac{1}{3}t$. 960. $x=\frac{1+t}{2}$. 961. $x=t^2-3t+4$.

962. $x=-(t^2+t+1)$. 963. $x= \ \ +t+t^2+e^{7t}$.

964. $x=t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2}t$. 965. $x=\frac{3t^2-t}{22}$. 966. $x=\operatorname{sen} t+e^t$.

967. $x=2-\frac{t(2t+1)}{56}e^{-2t}$ 968. $x=\left(\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{2}+t\right)e^{2t}$.

969. $x=\left(\frac{t^2}{8}+t-2\right)e^{\frac{t}{2}}$. 970. $x=(1+t)e^{-t}+(1-t)e^{-2t}$.

971. $x=\frac{t}{5}(6e^{3t}-2e^{-2t})$. 972. $x=\frac{t^4}{12}e^{-2t}$. 973. $x=e^t+\cos t-\operatorname{sen} t$.

974. $x=3(1+t)\operatorname{sen} 3t$. 975. $x=t\left(\operatorname{sen} 2t+\frac{1}{8}\cos 2t\right)$.

976. $x=\frac{t-1}{4}(\cos t+\operatorname{sen} t)$. 977. $37x=(36e^t+1)\cos 3t-6\operatorname{sen} 3t$.

978. $x=e^{2t}[(1-t)\cos t+(1+t)\operatorname{sen} t]$. 979. $x=t-1+2e^t$.

980. $x=-\frac{t}{4}$. 981. $x=te^t$. 982. $x=4t(\operatorname{sen} t-\cos t)$.

983. $x=\frac{1}{4}(1-\cos 2t+t\operatorname{sen} 2t)$. 984. $x=t$. 985. $\left.\begin{matrix} x=e^t+e^{-t} \\ y=-e^t+e^{-t} \end{matrix}\right\}$.

986. $\left.\begin{matrix} x=4e^{-2t}-3e^{-3t} \\ y=3e^{-3t}-2e^{-2t} \end{matrix}\right\}$. 987. $\left.\begin{matrix} x=e^t(\cos t-2\operatorname{sen} t) \\ y=e^t(3\operatorname{sen} t+\cos t) \end{matrix}\right\}$.

988. $\left.\begin{matrix} x=-\frac{5}{4}+\frac{13}{4}\cos 2t-3\operatorname{sen} 2t \\ y=\frac{3}{2}t+3\cos 2t+\frac{13}{4}\operatorname{sen} 2t \end{matrix}\right\}$. 989. $\left.\begin{matrix} x=e^t \\ y=e^t \end{matrix}\right\}$.

990. $\left.\begin{matrix} x=-\frac{1}{2}+e^t-\frac{11}{34}e^{4t}-\frac{3}{17}\cos t+\frac{5}{17}\operatorname{sen} t \\ y=-\frac{2}{3}e^t+\frac{22}{51}e^{4t}+\frac{4}{17}\cos t-\frac{1}{17}\operatorname{sen} t \end{matrix}\right\}$.

991. $\left.\begin{matrix} x=2-e^t \\ y=-2+4e^t-te^t \\ z=-2+5e^t-te^t \end{matrix}\right\}$. 992. $\left.\begin{matrix} x=1+3e^{2t}+e^{-2t} \\ y=e^{2t}-e^{-2t} \\ z=2e^{2t}+2e^{-2t} \end{matrix}\right\}$.

993. $\left.\begin{matrix} x=3-2e^{-t} \\ y=e^{-t} \\ z=e^{-t}-3 \end{matrix}\right\}$. 994. $\left.\begin{matrix} x=2(1-e^{-t}-te^{-t}) \\ y=2-t-2e^{-t}-2te^{-t} \end{matrix}\right\}$.

995. $\left.\begin{matrix} x=e^t+\operatorname{sen} t \\ y=e^t-\operatorname{sen} t \end{matrix}\right\}$. 996. $\left.\begin{matrix} x=\cos t+e^{-\sqrt{3}t} \\ y=\frac{1}{2}\left(\cos t-e^{-\sqrt{3}t}\right) \end{matrix}\right\}$.

997. $\left.\begin{matrix} x=t-\frac{t^3}{6}+e^t \\ y=1+\frac{1}{24}t^4-e^t \end{matrix}\right\}$. 998. $\left.\begin{matrix} x=12(\operatorname{ch} t-1)-\frac{7}{2}t\cdot\operatorname{sh} t \\ y=7t\cdot\operatorname{sh} t-17(\operatorname{ch} t-1) \end{matrix}\right\}$.

999. $\left.\begin{matrix} x=t^2+t \\ y=-\frac{1}{2}t^2 \end{matrix}\right\}$. 1000. $\left.\begin{matrix} x=e^t(2\cos t-\operatorname{sen} t) \\ y=e^t(3\cos t+\operatorname{sen} t) \end{matrix}\right\}$.

Tabla de las funciones-objeto fundamentales y sus imagenes

№ de orden	Función-objeto $f(t)$	Imagen $F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$
1.	1	$\frac{1}{p}$
2.	$t^n \quad (n=1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$t^\alpha \quad (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
4.	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$
5.	$\operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
6.	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
7.	$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
8.	$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
9.	$\operatorname{sen}(t-\alpha) \quad (\alpha>0)$	$\frac{1}{p^2+1}e^{-\alpha p}$
10.	$\cos(t-\alpha) \quad (\alpha>0)$	$\frac{p}{p^2+1}e^{-\alpha p}$
11.	$t^n e^{\lambda t} \quad (n=1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$
12.	$t^\alpha e^{\lambda t} \quad (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}$
13.	$e^{\lambda t} \operatorname{sen} \omega t$	$\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$

№ de orden	Función-objeto $f(t)$	Imagen $F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$
14.	$e^{\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
15.	t sen ωt	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
16.	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
17.	$J_n(t)\quad(n=0,1,2,\ldots)$	$\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$
18.	si t	$\frac{\operatorname{arcctg} p}{p}$
19.	$\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)\quad(\alpha>0)$	$\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p}$
20.	$\ln t$	$\frac{1}{p}\left(\ln\frac{1}{p}-c\right)$ donde $c=0,57722$ es la constante de Euler

A nuestros lectores:

"Mir" edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial "Mir", 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

LA EDITORIAL MIR PUBLICARÁ:

CÁLCULO DE VARIACIONES

de M. Krasnov, G. Makarenko, A. Kiseliov

Los autores de este libro son Mijaíl Krasnov, Grigori Makarenko, candidatos a doctores en ciencias físico-matemáticas y docentes del Instituto Energético de Moscu, y Alexandr Kiseliov, colaborador científico superior del Instituto Unificado de Investigaciones Nucleares de la ciudad de Dubna.

Este compendio contiene problemas y ejercicios dedicados a ilustrar los diferentes principios de la teoría y los métodos de resolución de las ecuaciones por el cálculo de variaciones.

Al principio de cada capítulo se resumen los resultados principales, se exponen los conocimientos teóricos necesarios, las fórmulas requeridas y se estudian con gran detalle ejemplos típicos ilustrativos.

Este manual contiene más de 100 ejemplos analizados y 230 problemas destinados para resolverse independientemente. Unos problemas se acompañan con las respuestas, otros, con las referencias de cómo deben resolverse.

La obra está dirigida a los estudiantes de los centros de enseñanza técnica superior que se especializan en los cálculos matemáticos.

Formato 14,5 × 22 cm. Encuadernado en tela con sobrecubierta. 200 págs.

Gordón V. y otros

Problemas de geometría descriptiva

Este libro ha sido elaborado de acuerdo con el material expuesto en el manual de V. O. Gordón «Curso de geometría descriptiva», siendo su complemento. Sin embargo, esto no excluye la posibilidad de utilizar otros manuales, puesto que para comprender los problemas de dicho libro solamente se requiere conocer las tesis fundamentales que debe poseer todo manual.

Esta recopilación muestra el proceso utilizado para resolver problemas tipo, que aclaran tesis fundamentales del curso de geometría descriptiva, dando soluciones detalladas de una serie de problemas.

Al final del libro se encuentran las respuestas a los problemas propuestos. Estas respuestas se dan en forma textual o gráfica, en función del carácter de los problemas.

La selección de problemas, hecha considerando su cantidad y contenido, garantiza el aprendizaje del material teórico del curso general de geometría descriptiva.

Los problemas de geometría han sido elegidos según programas que sirven para los estudiantes de las especialidades de construcción de maquinarias, de aparatos y mecánico-tecnológicas de los centros de enseñanza técnica superior.